

FACULDADE CAMPO LIMPO PAULISTA
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Projeto e Análise de Algoritmos II

Lista de Exercícios 3

Prof. Osvaldo.

1. Sejam A, B e C conjuntos. Prove as seguintes propriedades
 - a) Distributiva: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
 - b) Morgan: $A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$.
 - c) Associativa: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
 - d) Idempotência: $A \cup A = A$.

2. Prove as seguintes propriedades lógicas:
 - a) Distributiva: $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;
 - b) Morgan: $x \vee y = \neg (\neg x \wedge \neg y)$.
 - c) Associativa: $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$.
 - d) Idempotência: $x \vee x = x$.

3. Mostre que a classe de complexidade de problemas **P** é fechada para união, intersecção, complemento, concatenação e fecho de kleene. Isto é, se as linguagens L, L_1 e $L_2 \in \mathbf{P}$, então:
 - a) $L_1 \cup L_2 \in \mathbf{P}$;
 - b) $L_1 \cap L_2 \in \mathbf{P}$;
 - c) $\overline{L} \in \mathbf{P}$;
 - d) $L_1 \cdot L_2 \in \mathbf{P}$;
 - e) $L^* \in \mathbf{P}$.

4. Mostre que a classe de complexidade de problemas **NP** é fechada para união, intersecção, concatenação e fecho de kleene. Isto é, se as linguagens L, L_1 e $L_2 \in \mathbf{NP}$, então:
 - a) $L_1 \cup L_2 \in \mathbf{NP}$;
 - b) $L_1 \cap L_2 \in \mathbf{NP}$;
 - c) $L_1 \cdot L_2 \in \mathbf{NP}$;
 - d) $L^* \in \mathbf{NP}$.

5. Mostre que $L_{\text{SUBSET-SUM}}$ pertence a **NP**.
 $L_{\text{SUBSET-SUM}} = \{ \#S\#k\# \mid \text{existe subconjunto } S' \text{ de } S \text{ tal que a soma dos elementos de } S' \text{ seja igual a } k \}$;

6. Mostre que $\mathbf{P} \subseteq \text{co-NP}$.

7. Mostre que a relação \leq_p é uma relação transitiva entre linguagens. Isto é, $L_1 \leq_p L_2$ e $L_2 \leq_p L_3$ então $L_1 \leq_p L_3$.
8. Mostre que qualquer linguagem em NP pode ser decidida por um algoritmo em um tempo $2^{O(n^k)}$, para alguma constante $k > 0$.
9. O professor José Sabido mostrou que um problema de decisão (linguagem) L pode ser reduzido em tempo polinomial a um problema (linguagem) NP-completo M. Além disso, após 80 páginas de matemática complicada, ele mostrou que L pode ser resolvido em tempo polinomial. Ele acabou de mostrar que $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$? Por que?
10. O professor José Sabido acaba de projetar um algoritmo que recebe um grafo G com n vértices e determina em tempo $O(n^c)$, $c > 0$, se G contém uma clique de tamanho igual a k . O professor José Sabido merece o Prêmio Turing da ACM (http://en.wikipedia.org/wiki/Turing_Award) por ter acabado de mostrar que $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$? Por que?
11. Mostre que toda linguagem L em \mathbf{P} pode ser reduzida em tempo polinomial à linguagem $M = \{ \#y\# \mid y = 5 \}$, linguagem correspondente ao problema de decisão que determina se $y = 5$. Verifique também que uma linguagem L em \mathbf{P} não pode ser reduzida à linguagem \emptyset e também à linguagem Σ^* .
12. Admitindo que $L_{\text{PARTIÇÃO}} \in \mathbf{NP-completo}$, mostre que $L_{\text{SUBSET-SUM}} \in \mathbf{NP-completo}$.