Projeto e Análise de Algoritmos II

Estruturas de Dados

Prof. Dr. Osvaldo Luiz de Oliveira

Estas anotações devem ser complementadas por apontamentos em aula.

Vetor (*array*)

- É uma estrutura de dados que armazena elementos do mesmo tipo (inteiro, ou real, ou um registro etc.).

- Permite acesso indexado a qualquer de seus elementos.

- Tem sempre um tamanho fixo.

Complexidades

• Espaço: tendo um tamanho fixo, um vetor gasta sempre uma quantidade constante de memória durante a execução do algoritmo. Portanto, a complexidade de espaço devida a um vetor é *O* (1).

• Tempo para inserir, buscar ou remover um elemento: qualquer elemento de um vetor pode ser pesquisado, inserido ou removido em um tempo constante (*O*(1)).

Limitações

- Um vetor não pode ser usado para armazenar elementos de diferentes tipos.

- O tamanho de um vetor não pode aumentar dinamicamente, i.e., à medida que o algoritmo é executado.

Registro

• É uma E.D. similar a um vetor, exceto pelo fato de que ela pode armazenar elementos de diferentes tipos.

```
registro exemplo {
    n: inteiro;
    x: real;
    v: vetor [1..20] de inteiro;
    matriz: vetor [1..20, 1..30] de booleano;
    registro outroRegistro {
        h: cadeia_de_caracteres;
        c: caracter;
        y: vetor [ 1..12] de inteiro;
    }
}
```

Acesso

exemplo.*n* := 5;

exemplo.*x* := 3.2;

y := exemplo.*x* * 5 + exemplo.*n*;

exemplo.*v* [2] := 15;

Exemplo.matriz [2, 4] := verdadeiro;

exemplo.outroRegistro.*h* := ‘a’;

Complexidade

• Espaço: tendo um tamanho fixo, um registro gasta sempre uma quantidade constante de memória durante a execução de um algoritmo. Portanto, a complexidade de espaço é O (1).

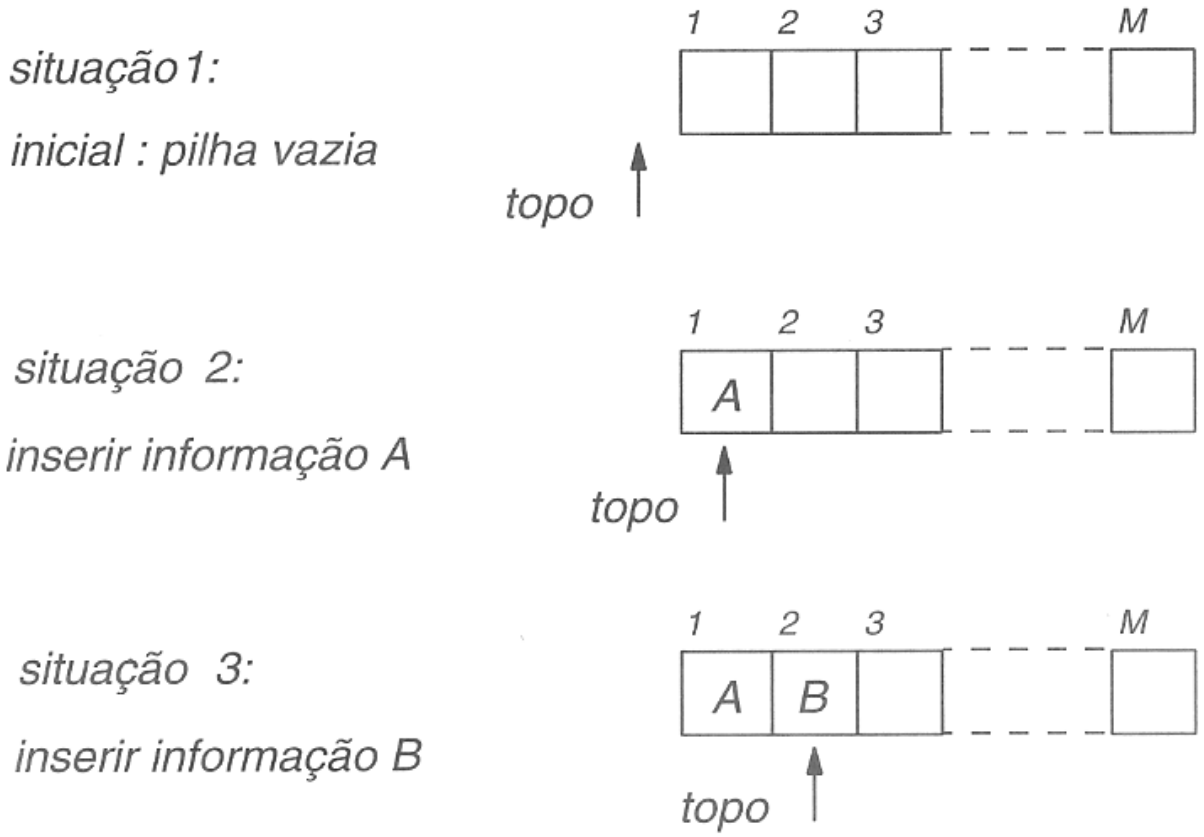
• Tempo para buscar, inserir e remover: qualquer campo de um registro pode ser pesquisado, inserido ou removido em um tempo constante ($O(1)$).

Limitação

- O tamanho de um registro não pode aumentar dinamicamente.

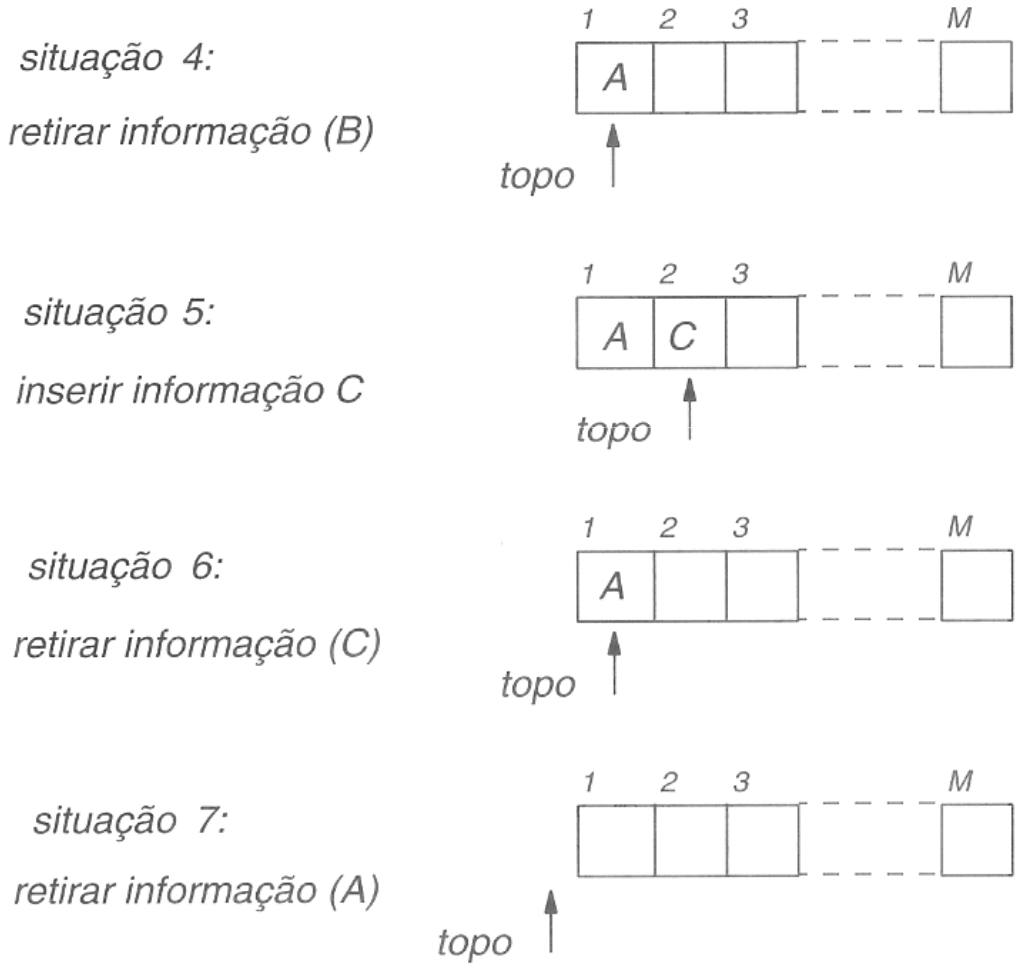
Pilha

Disciplina de entrada e saída de elementos:
LIFO (*last input*, *first output*).



Fonte: SZWARCFITER, J. L.; MARKENZON, L. Estruturas de Dados e Seus Algoritmos. Rio de Janeiro: LTC, 1994.

Pilha



Fonte: SZWARCFITER, J. L.; MARKENZON, L. Estruturas de Dados e Seus Algoritmos. Rio de Janeiro: LTC, 1994.

Algoritmos

```
Algoritmo Empilhar (P, x)
{
    se ( topo ≠ M )
    {
        topo := topo + 1;
        P [topo] := x
     }
     senão Escrever ('Escrever: pilha cheia.')
}

Algoritmo Desempilhar (P, x)
{
    se ( topo ≠ 0 )
    {
        x := P [topo];  topo := topo - 1;
        retornar x
     }
     senão Escrever ('Escrever: pilha vazia.')

}
```

Algoritmos

```
Algoritmo Vazia (P)
{
    se ( topo = 0 ) retornar verdadeiro
    senão retornar falso
}

Algoritmo Cheia (P)
{
    se ( topo = M ) retornar verdadeiro
    senão retornar falso
}

Algoritmo ElementoNoTopo (P)
{
    se ( não Vazia (P) ) retornar P [topo]
    senão Escrever ('Erro: pilha vazia.')
}
```

Complexidades

Empilhar, Desempilhar, Vazia, Cheia, ElementoNoTopo

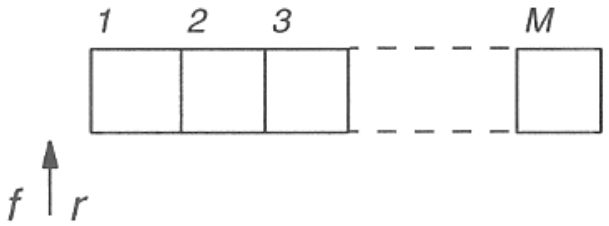
T(n) = O (1).

Fila

Disciplina de entrada e saída de elementos:
FIFO (*first input, first output*).

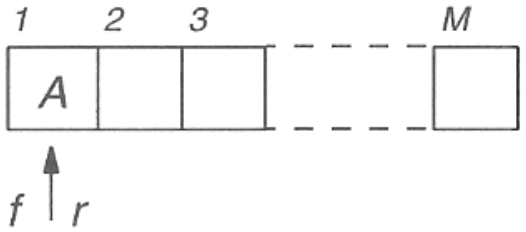
situação 1:

inicial : fila vazia



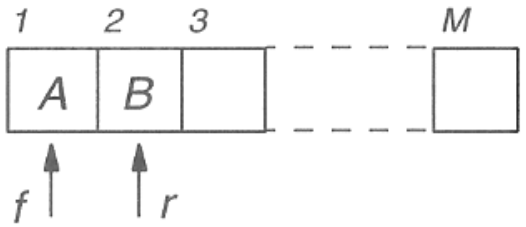
situação 2:

inserir informação A



situação 3:

inserir informação B

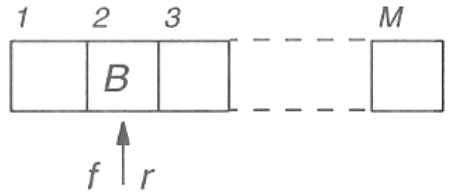


Fonte: SZWARCFITER, J. L.; MARKENZON, L. Estruturas de Dados e Seus Algoritmos. Rio de Janeiro: LTC, 1994.

Fila

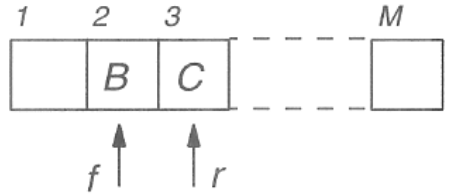
situação 4:

retirar informação (A)



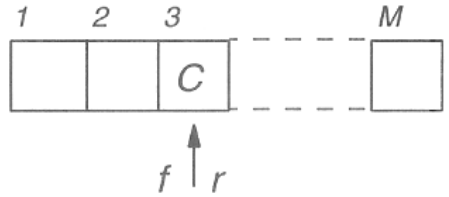
situação 5:

inserir informação C



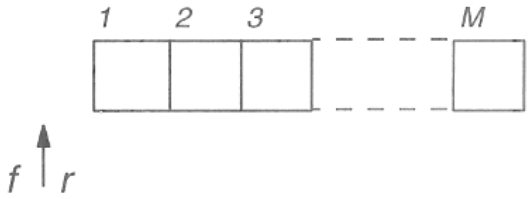
situação 6:

retirar informação (B)



situação 7:

retirar informação (C)



Fonte: SZWARCFITER, J. L.; MARKENZON, L. Estruturas de Dados e Seus Algoritmos. Rio de Janeiro: LTC, 1994.

Algoritmos

```
Algoritmo Inserir (F, x)
{
     prox := r mod M + 1;
     se ( r ≠ f )
     {
          r := prox;  F [prox] := x;
          se ( f = 0 ) f := 1
      }
      senão Escrever (‘Fila cheia.’)
}

Algoritmo Retirar (F, x)
{
    se ( f ≠ 0 )
     {
          x := F [ f  ];
          se ( f = r ) então f := r := 0
          senão f := f mod M + 1;
          retornar x
      }
      senão Escrever (‘Fila vazia.’)

}
```

Algoritmos

```
Algoritmo Vazia (F)
{
     se ( f = 0 ) retornar verdadeiro
     senão retornar falso
}

Algoritmo Cheia (F)
{
    prox := r mod M + 1;
    se ( f = r ) retornar verdadeiro
    senão retornar falso
}

Algoritmo ElementoNaFrente (F)
{
     se ( não Vazia (F) ) retornar F [ f ]
     senão Escrever ('Erro: fila vazia.')
}
```

Complexidades

Inserir, Retirar, Vazia, Cheia, ElementoNaFrente:

$T(n) = O(1)$.

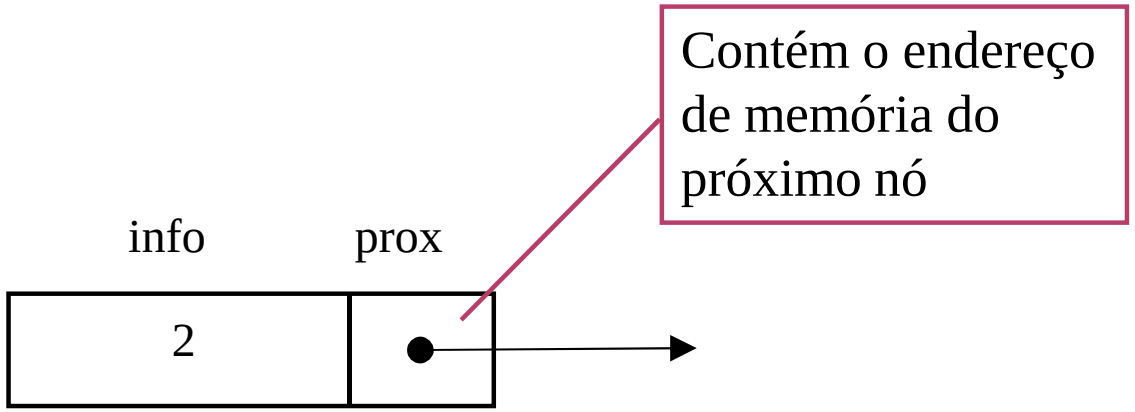
Listas ligadas (ou encadeadas)

• Existem muitas aplicações na qual o número de elementos envolvidos pode variar durante a execução do algoritmo. Pode-se definir um vetor ou um registro de um certo tamanho fixo como estrutura de dados para o algoritmo. Mas o tamanho fixo pode não ser suficiente ou pode ser demasiado. Nestes casos, estruturas de dados que podem modificar o seu tamanho dinamicamente podem ser desejáveis. A lista ligada é uma delas.

Listas ligadas simples

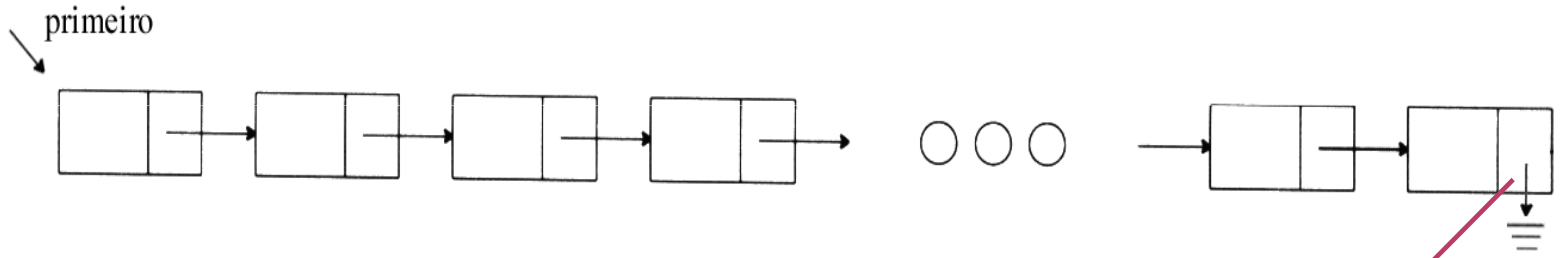
• Listas ligadas são estruturas de dados formadas por nós contendo no mínimo um campo, onde a informação é armazenada, e um campo ponteiro. Em uma lista ligada simples, o campo ponteiro contém o endereço do próximo nó na lista.

```
registro nó
{
    info: inteiro;
    prox: ponteiro;
}.
```



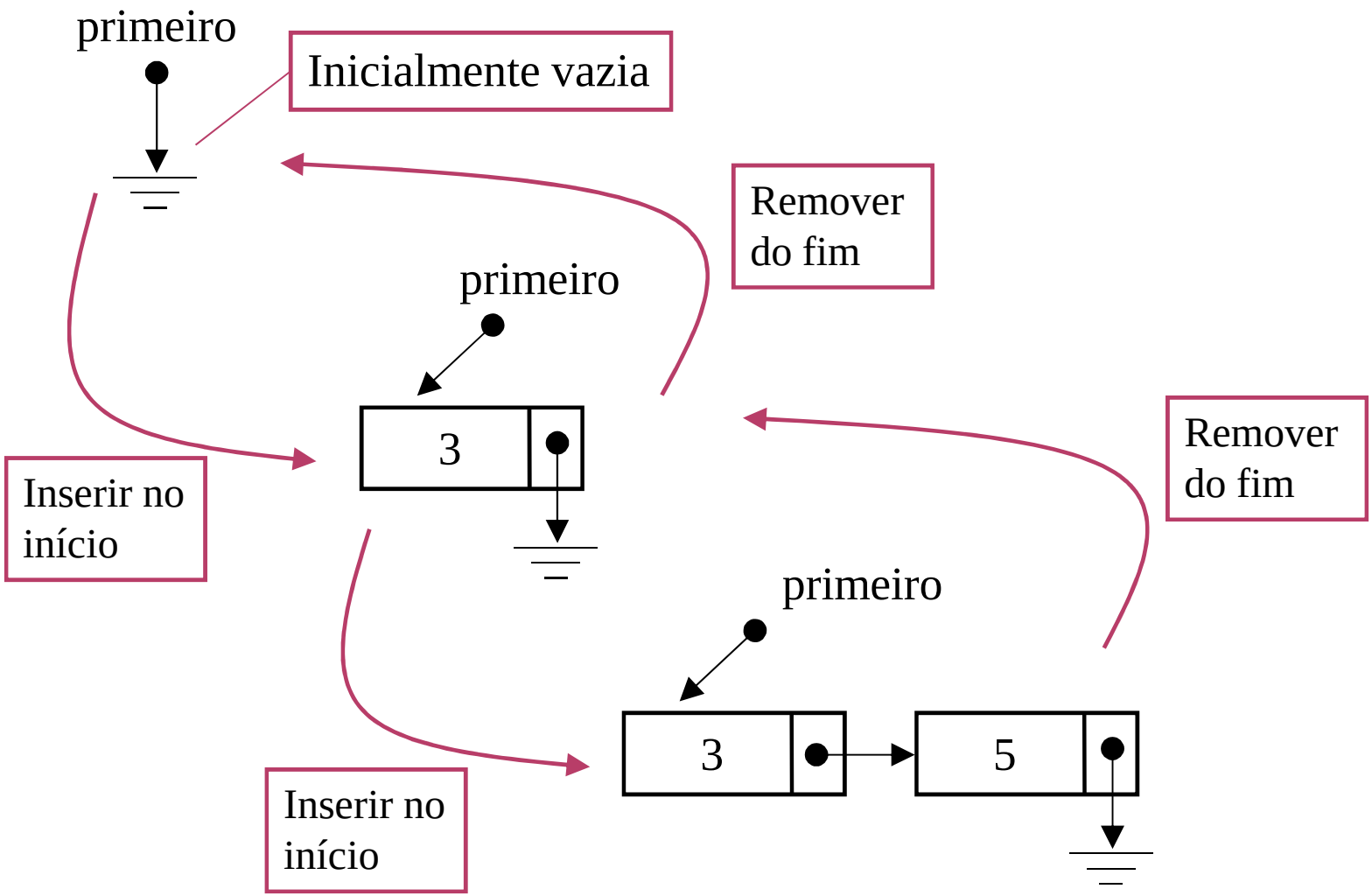
Uma lista ligada simples

• Um ponteiro especial contém o endereço do primeiro nó da lista.



Ponteiro para nil (ou null): indica o fim.

Um possível “ciclo de vida”



Busca

Algoritmo Busca (*primeiro*, *x*)
Entrada: *primeiro*, um ponteiro para uma lista ligada simples e *x*, um valor.
Saída: um ponteiro para o nó de valor igual a *x*, ou nil, caso tal nó não exista.

```
{
    p := primeiro;
    enquanto ( p ≠ nil e p.info ≠ x)
        p := p.prox;

    retornar p
}
```

Complexidade
T(*n*) = *O* (*n*).

Inserir no início

Algoritmo InserirInício (*primeiro*, *x*)

Entrada: *primeiro*, um ponteiro para uma lista ligada simples e *x*, um elemento a inserir.

Saída: a lista com o elemento *x* inserido no início.

```
{
1 Novo (p); // Cria um novo nó e faz o ponteiro p apontar para ele.
2 p.info := x;
3 p.prox := primeiro;
4 primeiro := p
}
```

Complexidade

$T(n) = O(1)$.

Obs.: observe que o algoritmo funciona também no caso da lista estar inicialmente vazia.

Remover do fim

Algoritmo RemoverFim (*primeiro*)
Entrada: *primeiro*, um ponteiro para uma lista ligada simples.
Saída: se a lista não está vazia, remove o último elemento e retorna o seu valor.

```
{
   se (primeiro = nil)   // A lista está vazia.
        Mensagem ('Não é possível remover')
   senão
   {     // A lista tem, pelo menos, um elemento.
   (1)  p := primeiro; q := p.prox;  // q "passeará" na frente de p.

        se (q = nil)
        {   // A lista tem apenas um elemento.
        (2) x := p.info;
        (3) Devolver (p);  // Devolve a região de memória apontada por p.
        (4) primeiro := nil;
        }
```

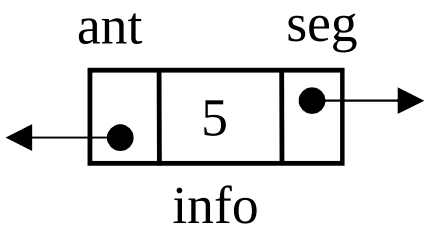
```
        senão
        {  // A lista tem, pelo menos, dois elementos.

           enquanto (q.prox ≠ nil)
           {
           (5) p := q;
           (6) q := q.prox
           }
           // Ao final deste laço p e q apontam, respectivamente, para o penúltimo e último
           // elemento da lista.

        (7) x := q.info;
        (8) p.prox := nil;
        (9) Devolver (q); // Devolve a região de memória apontada por q.
        }
        retornar x
    }
}
```

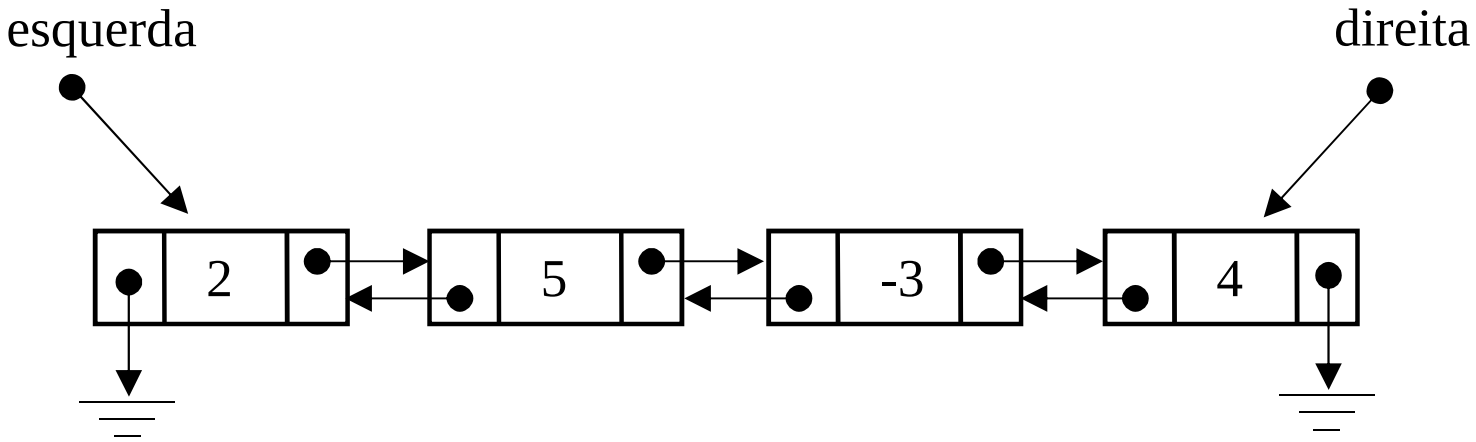
Complexidade

- A complexidade deste algoritmo é proporcional à quantidade de vezes em que o laço "**enquanto** (q.prox ≠ nil) ..." será executado. Logo,

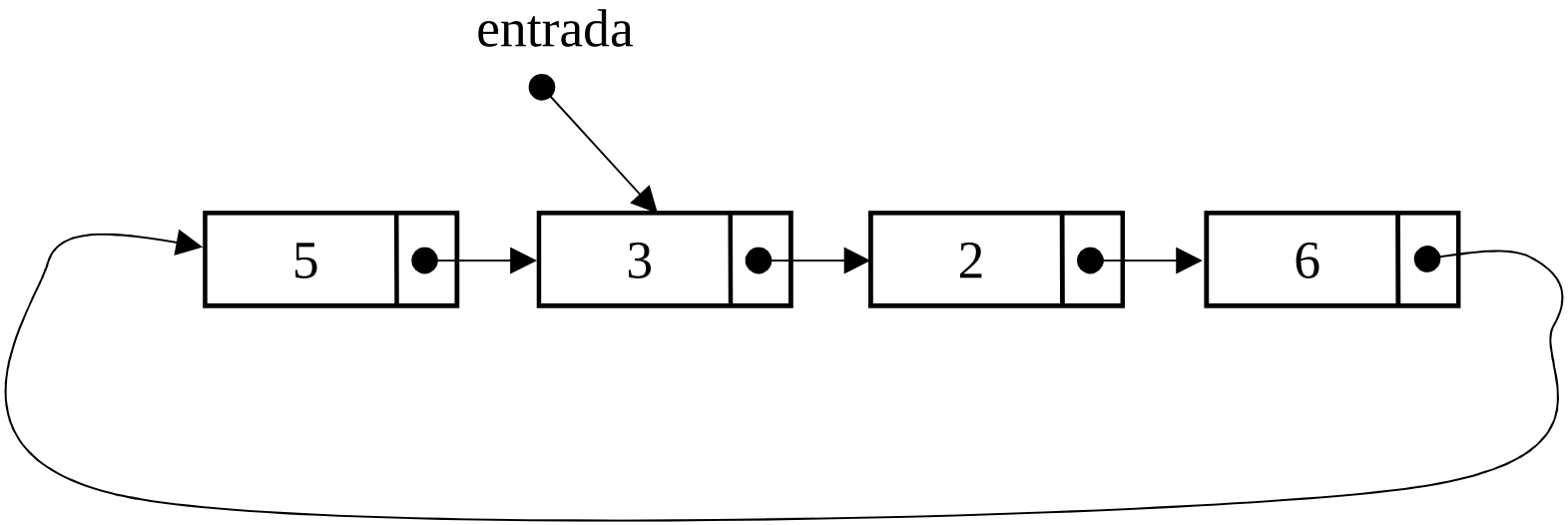
$T(n) = O(n)$.

Lista duplamente ligada





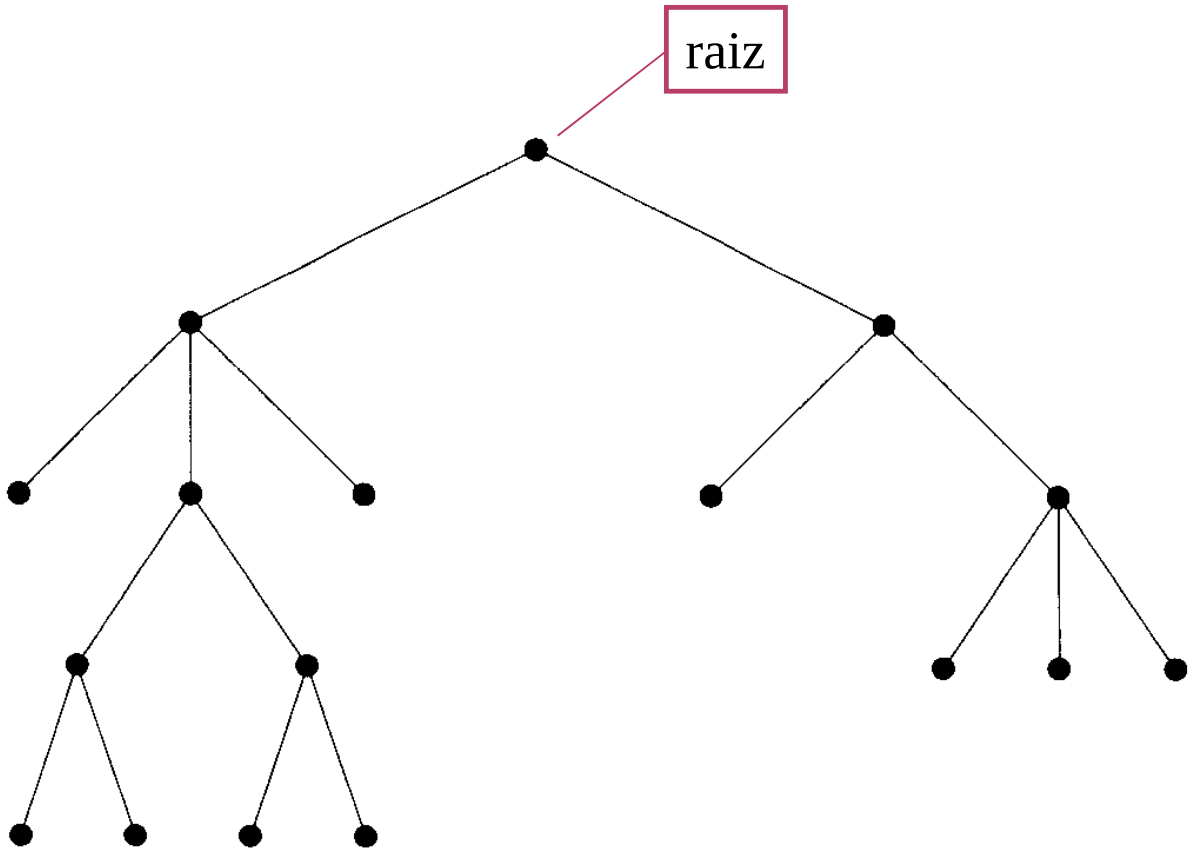
Lista circular simples



Árvores

Árvores são estruturas de dados que suportam bem muitas operações dinâmicas tais como: busca, inserção, remoção, cálculo do máximo, cálculo do mínimo, cálculo do predecessor, cálculo do sucessor etc..

Árvore enraizada



Definições

• O nó no topo da árvore é chamado de raiz. A raiz está conectada a outros nós, os quais estão no nível 1 da hierarquia. Estes nós por sua vez estão conectados a nós no nível 2 e assim por diante. Todas as conexões são entre um nó e o seu único pai. A raiz não tem nenhum pai.

• A principal propriedade de uma árvore é que ela não tem ciclo. Como consequência, existe apenas uma única rota (caminho) ligando quaisquer dois nós na árvore.

• Um nó conectado ao seu superior é dito ser filho deste nó.

Definições

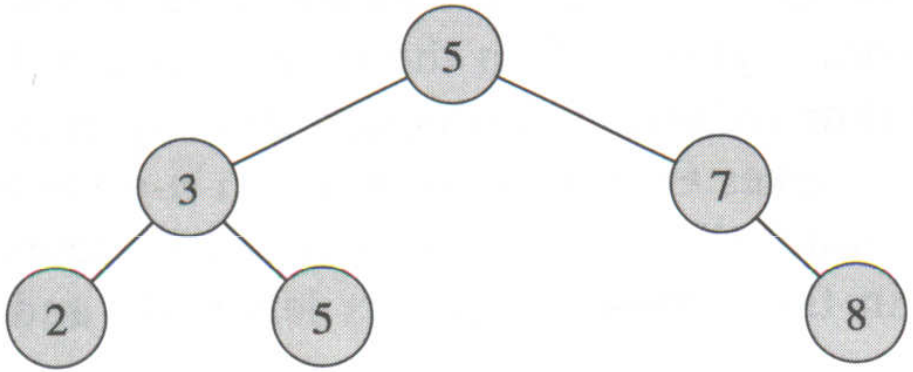
• O maior número de filhos entre todos os nós da árvore é denominado grau da árvore.

• Um nó sem nenhum filho é chamado de folha.

• A altura de uma árvore é o nível máximo da árvore. Em outras palavras, é a distância máxima entre a raiz e as folhas. Por definição a raiz está no nível 0.

Árvore binária

- Árvore cujo grau é 2, isto é, cada nó pode ter no máximo 2 filhos.



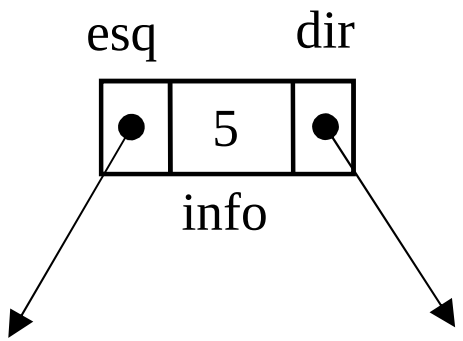
- Tendo um nó no máximo dois filhos eles serão chamados de filho esquerdo e filho direito conforme a sua posição em relação a um observador que olha para a hierarquia.

Representações

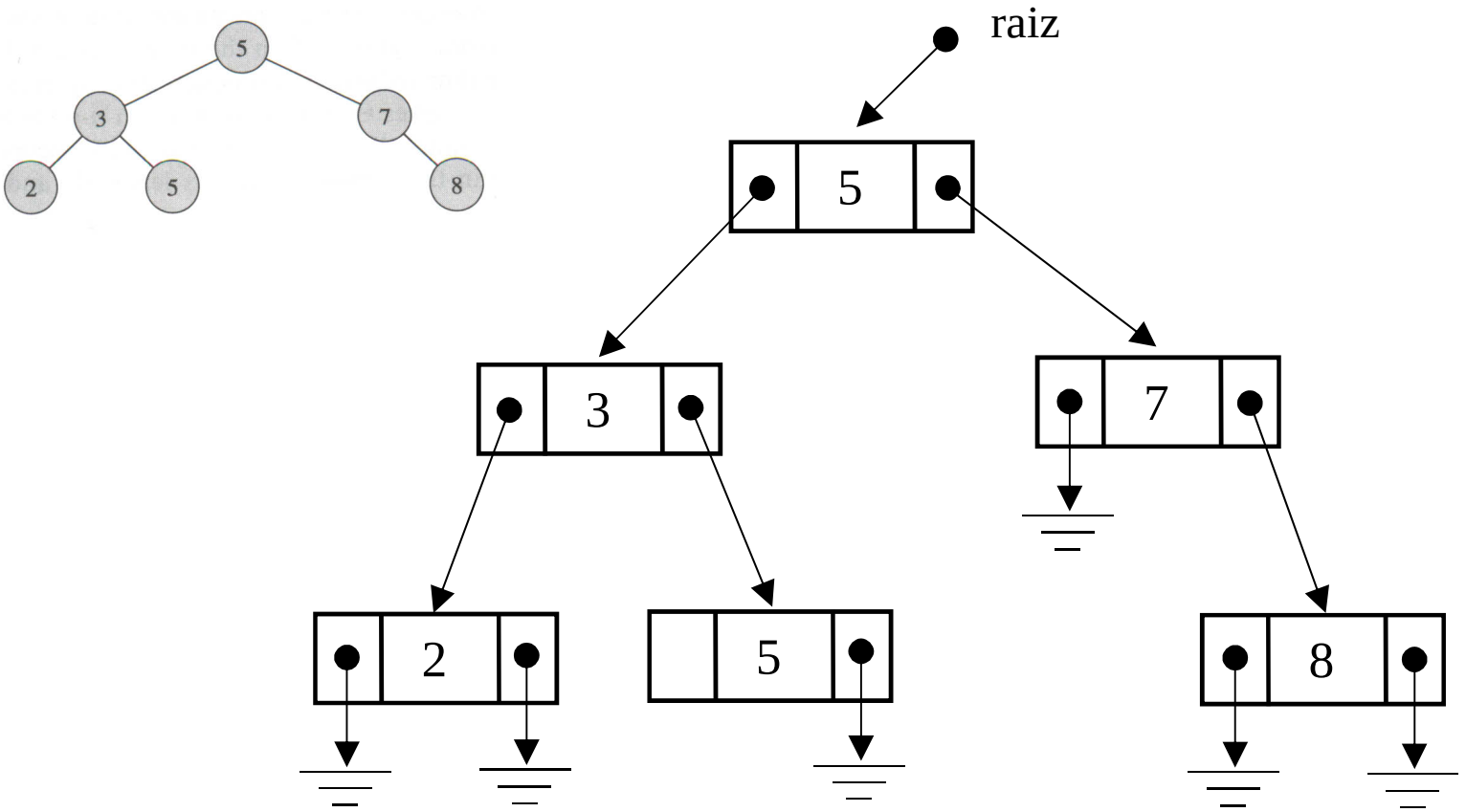
- Por meio de ponteiros;
- Por meio de um vetor;
- Por meio de uma matriz de adjacências;
- Por meio de uma lista de adjacências;
- Outras

Por meio de ponteiros

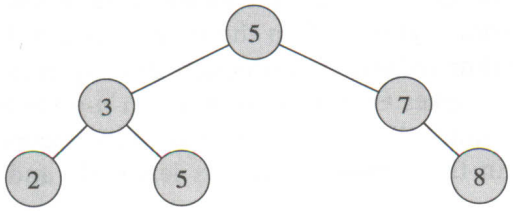
```
registro nó
{
    info: inteiro;
    esq, prox: ponteiro;
}.
```



Por meio de ponteiros



Por meio de um vetor



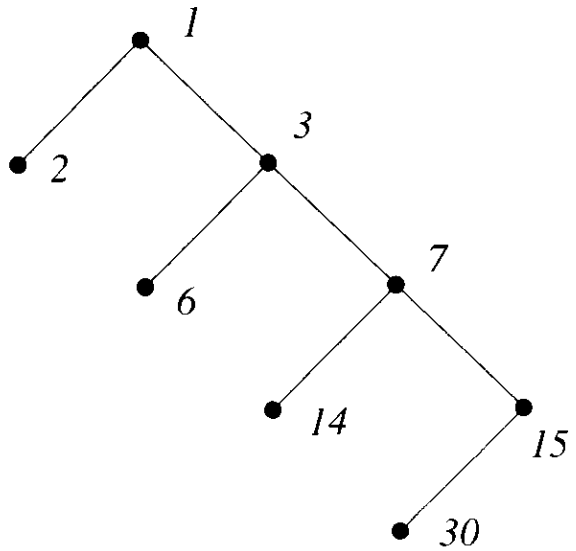
1	2	3	4	5	6	7
5	3	7	2	5		8

(1) a a raiz é o elemento *A* [1].
(2) Os filhos esquerdo e direito do elemento *A* [*i*] são, respectivamente, *A* [2i] e *A* [2*i* + 1].

Vantagem e desvantagem da representação por meio de um vetor

• Vantagem: economiza espaço por não usar ponteiros.

• Desvantagem: se a árvore é desbalanceada então muitos nós não existentes são representados. A ilustração abaixo mostra que é necessário um vetor de tamanho igual a 30 para armazenar os 8 nós da árvore representada, gerando desperdício.



Fonte: MANBER, U. Introduction to Algorithms: A Creative Approach. Boston: Addison Wesley, 1989.

Árvore binária de busca

- Uma árvore binária de busca implementa eficientemente as seguintes operações:
  - busca (*x*): procura o elemento de valor igual a *x* na estrutura de dados ou determina que *x* não está presente;
  - inserção (*x*): insere o elemento *x* na estrutura de dados.
  - remoção (*x*): remove o elemento de valor igual a *x* da estrutura de dados.

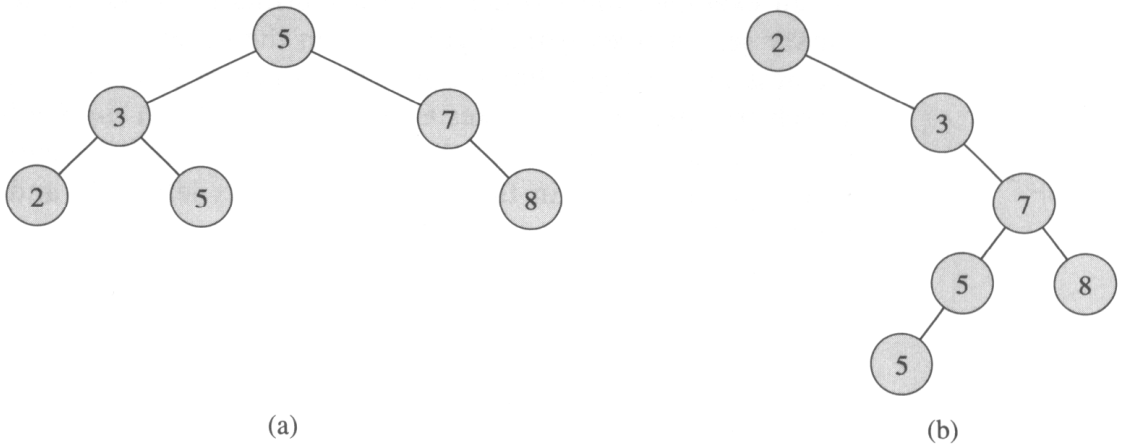
- Estruturas de dados que implementam eficientemente estas operações são referenciadas na literatura como sendo dicionários.

Propriedade

Seja A uma árvore binária cuja raiz é r.
Sejam A_e e A_d as subárvores esquerda e direita de A.

Nós dizemos que A é uma árvore binária de busca se ela satisfizer as seguintes propriedades:

- $x < r < y$ para todo elemento x pertencente a A_e e para todo elemento y pertencente a A_d;
- A_e e A_d são também árvores binárias de busca.



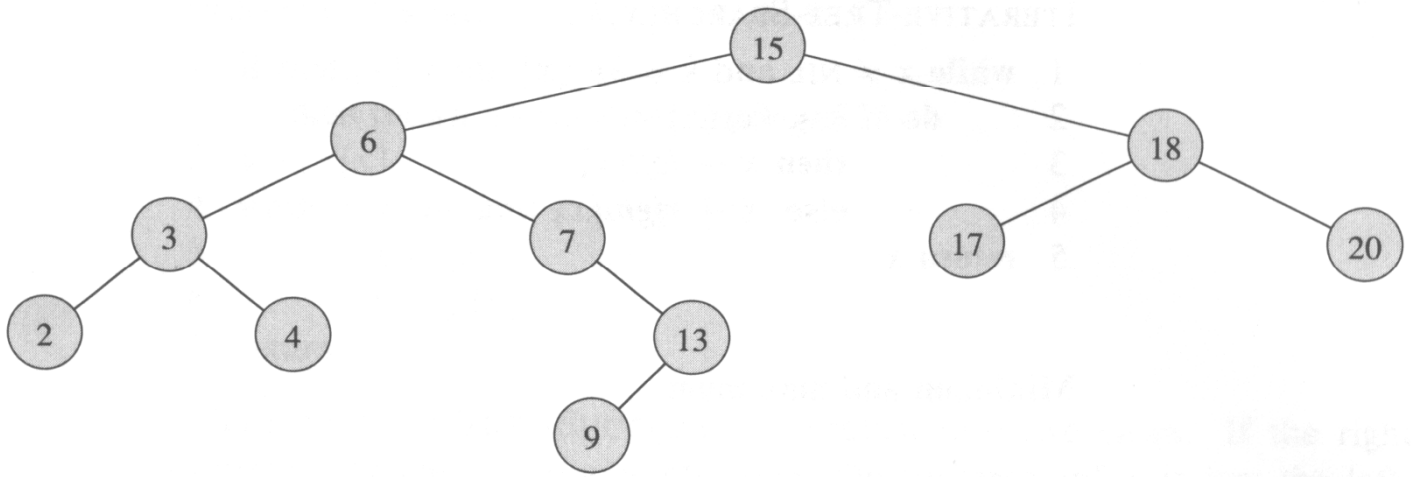
Fonte: CORMEN, T.; LEISERSON, C.; RIVEST, R.; STEIN, C. Introduction to Algorithms. New York: MIT Press, 2004.

Percursos

- Inorder
- Preorder
- Posorder
- Por níveis (ou em largura)
- Outros

Inorder

1. Visita a sub-árvore esquerda
   Visita a raiz
   Visita a sub-árvore direita

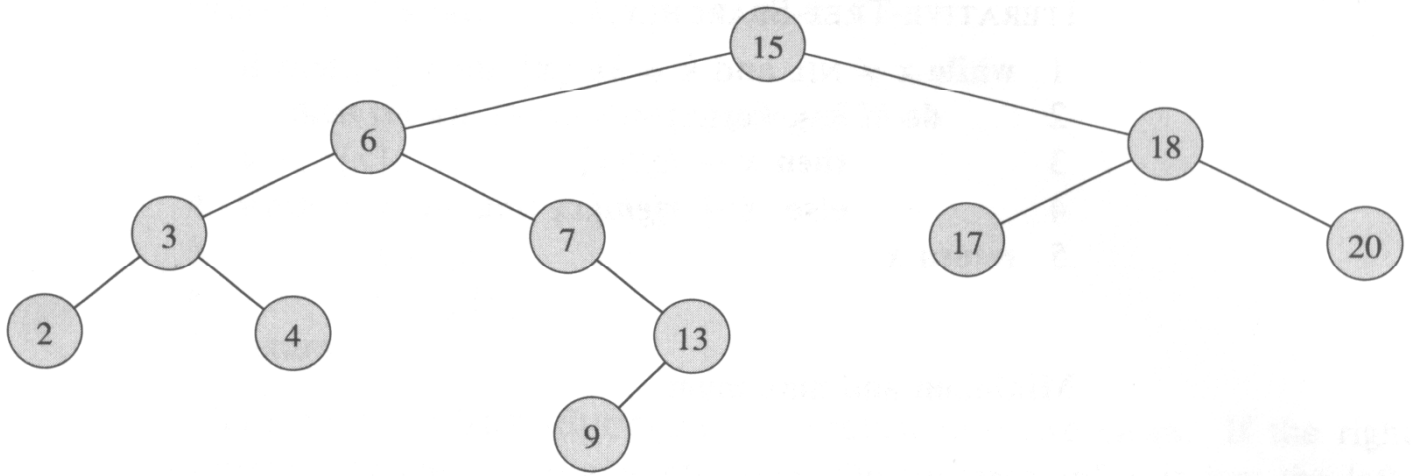


Fonte: CORMEN, T.; LEISERSON, C.; RIVEST, R.; STEIN, C. Introduction to Algorithms. New York: MIT Press, 2004.

Ordem do percurso: 2, 3, 4, 6, 7, 9, 13, 15, 17, 18, 20

Preorder

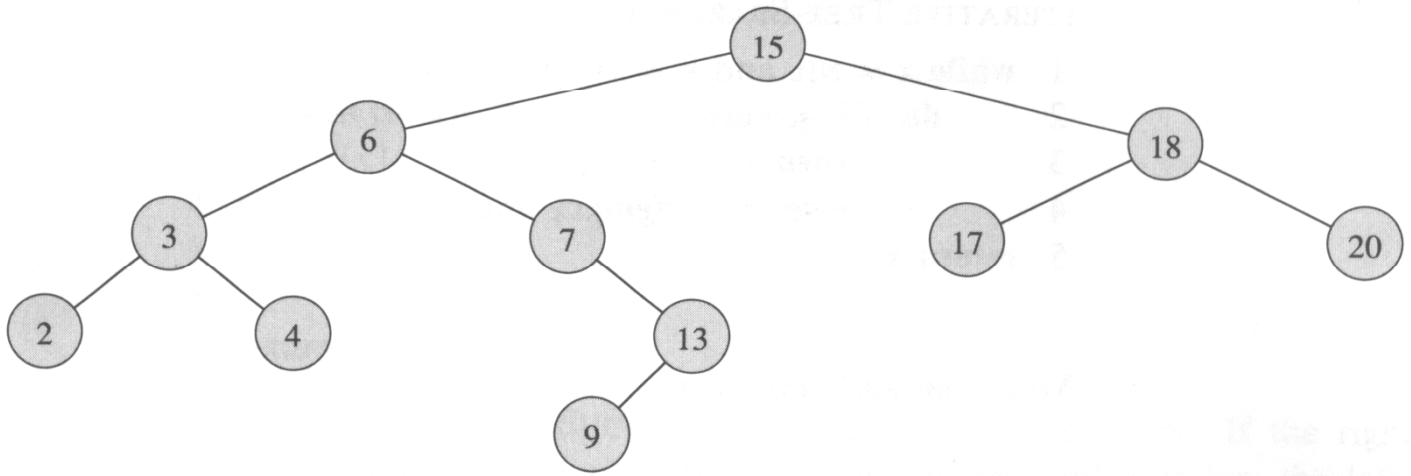
1. Visita a raiz
   Visita a sub-árvore esquerda
   Visita a sub-árvore direita



Ordem do percurso: 15, 6, 3, 2, 4, 7, 13, 9, 18, 17, 20

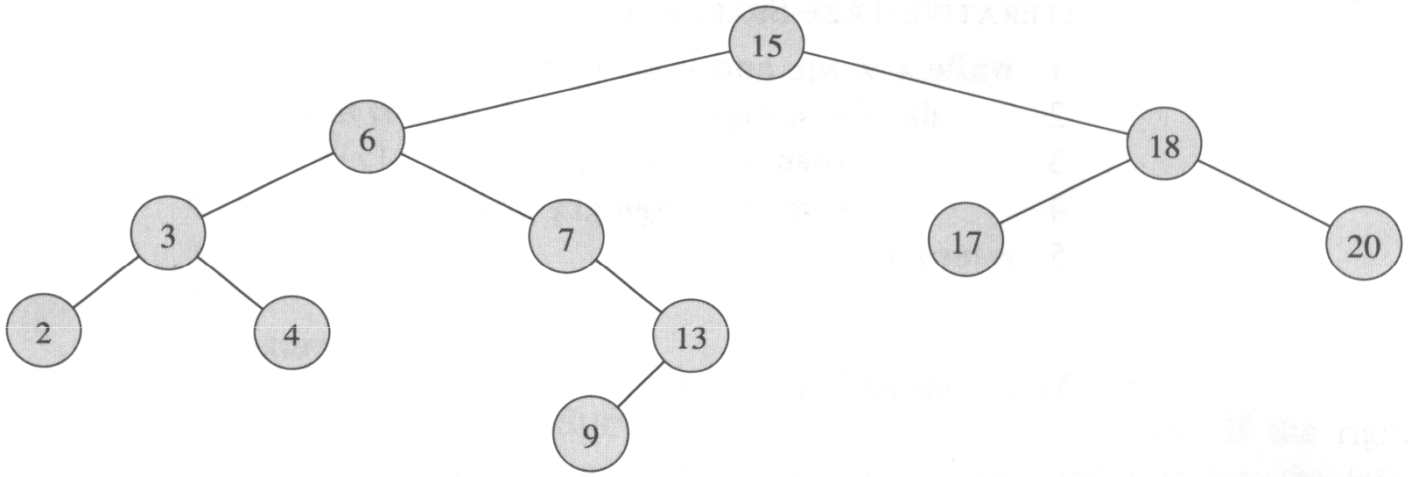
Posorder

1. Visita a sub-árvore esquerda
   Visita a sub-árvore direita
   Visita a raiz



Ordem do percurso: 2, 4, 3, 9, 13, 7, 6, 17, 20, 18, 15

Por níveis (em largura)



Ordem do percurso: 15, 6, 18, 3, 7, 17, 20, 2, 4, 13, 9

Algoritmos e complexidades

Teorema

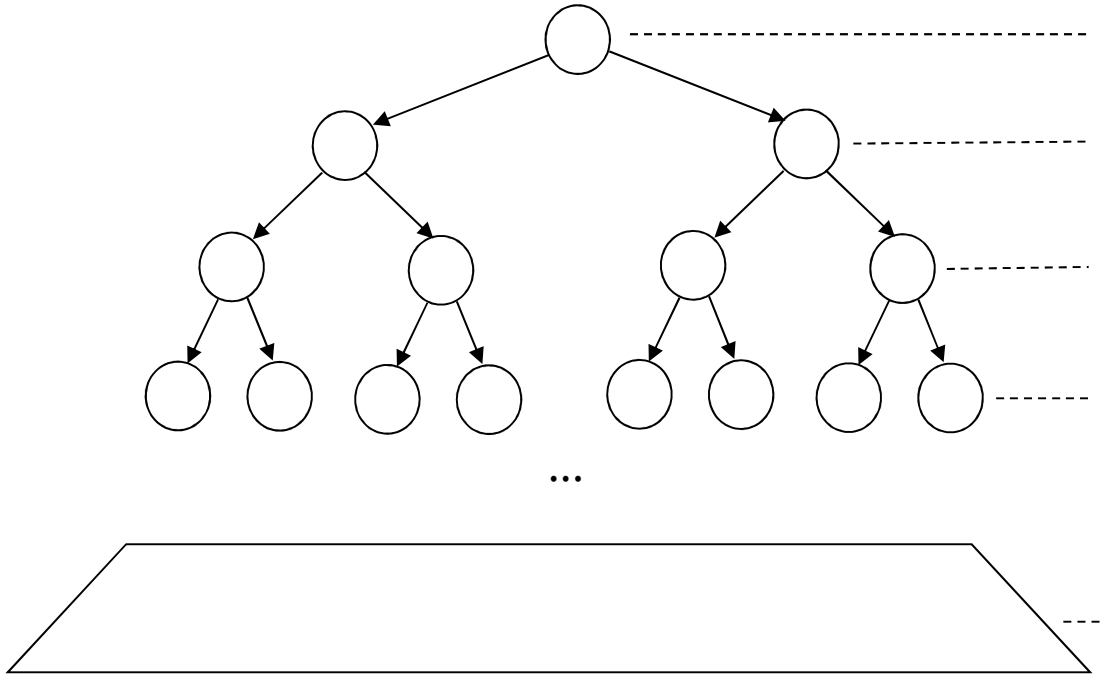
A altura h de uma árvore binária com $n \geq 1$ vértices varia segundo a relação abaixo:

$$\Omega\,(log\ n) \leq h \leq O\,(n)$$

Mínima: ocorre para a árvore binária é cheia.

Máxima: ocorre quando a árvore binária está estritamente desbalanceada, por exemplo, para a direita.

Árvore binária cheia

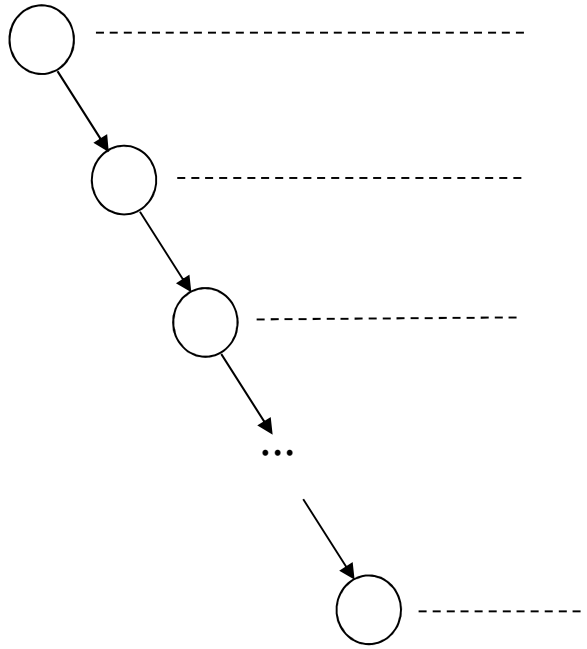


Nível	Qde nós
0	1
1	2
2	2^2
3	2^3
...	...
h	2^h

$$n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^h = 2^{h+1} - 1$$

$$h = log\,(n + 1) - 1 = \Omega\,(\log n)$$

Árvore estritamente desbalanceada à direita

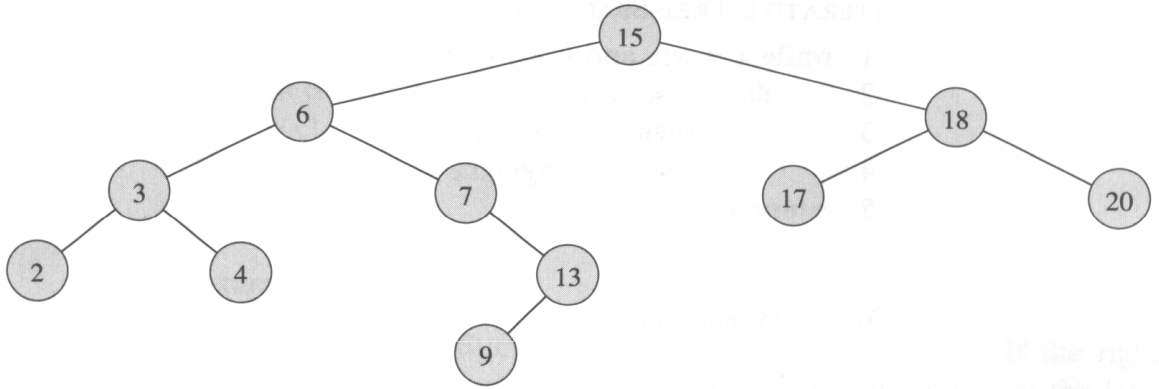


Nível	Qde nós
0	1
1	1
1	1
...	...
h	1

$n = (h - 0 + 1) \cdot 1 = h + 1$

$h = n - 1 = O(n)$

Busca

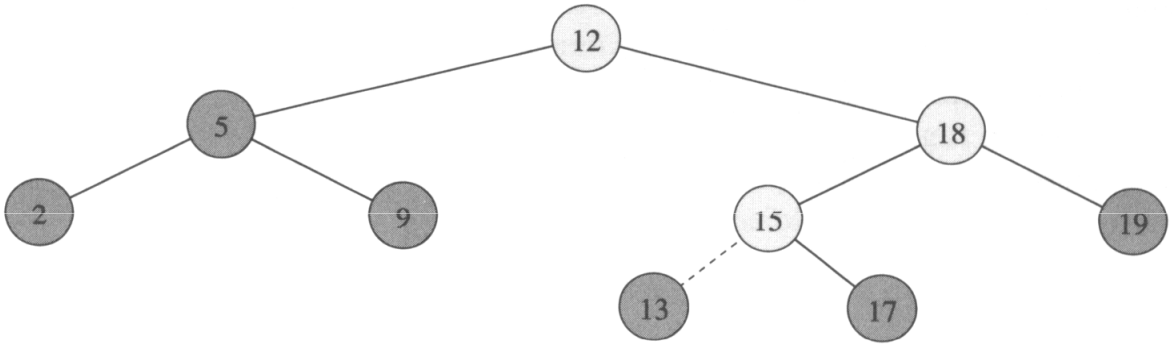


Para achar o elemento 13 na árvore deve-se seguir a rota 15 -> 6 -> 7 -> 13.

Algoritmo e complexidade

Inserção

Inserir o elemento 13.

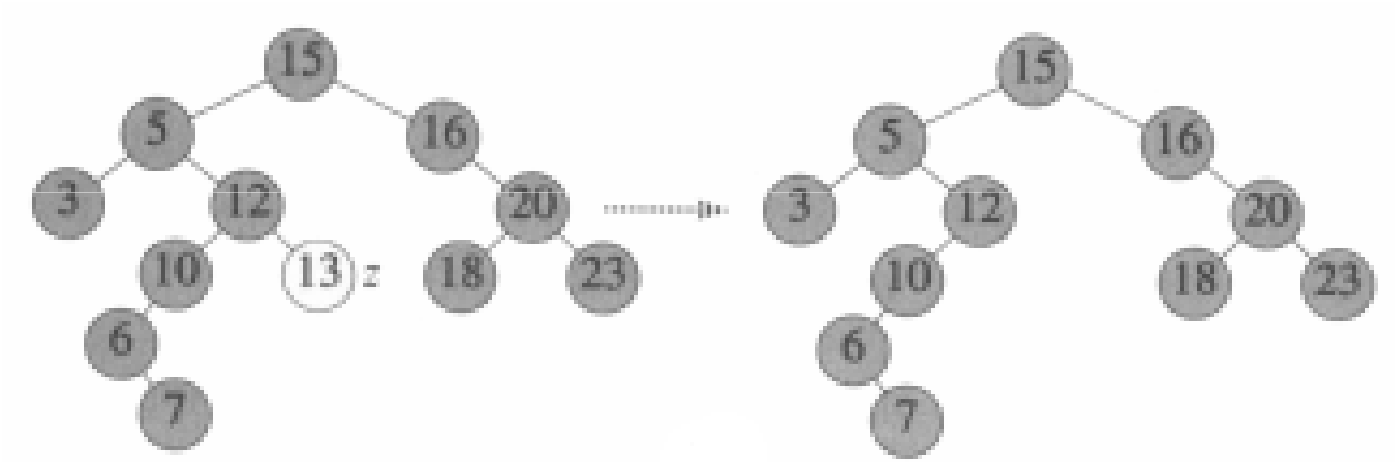


Fonte: CORMEN, T.; LEISERSON, C.; RIVEST, R.; STEIN, C. Introduction to Algorithms. New York: MIT Press, 2004.

Algoritmo e complexidade

Remoção

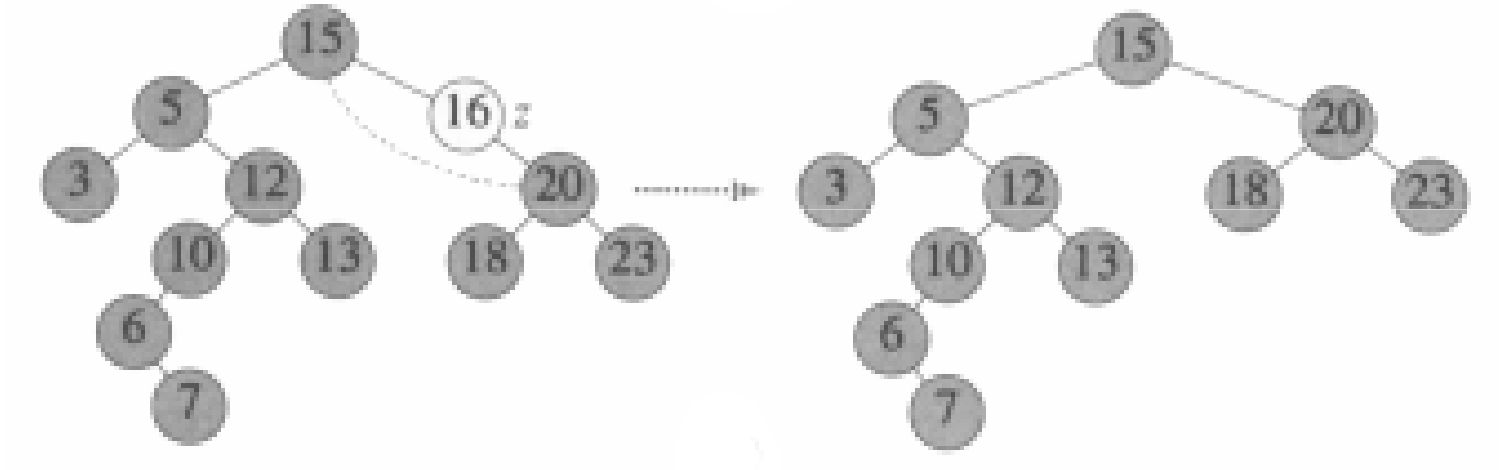
Caso 1: elemento a ser removido não tem filhos.



Fonte: CORMEN, T.; LEISERSON, C.; RIVEST, R.; STEIN, C. Introduction to Algorithms. New York: MIT Press, 2004.

Remoção

Caso 2: elemento a ser removido tem um filho.

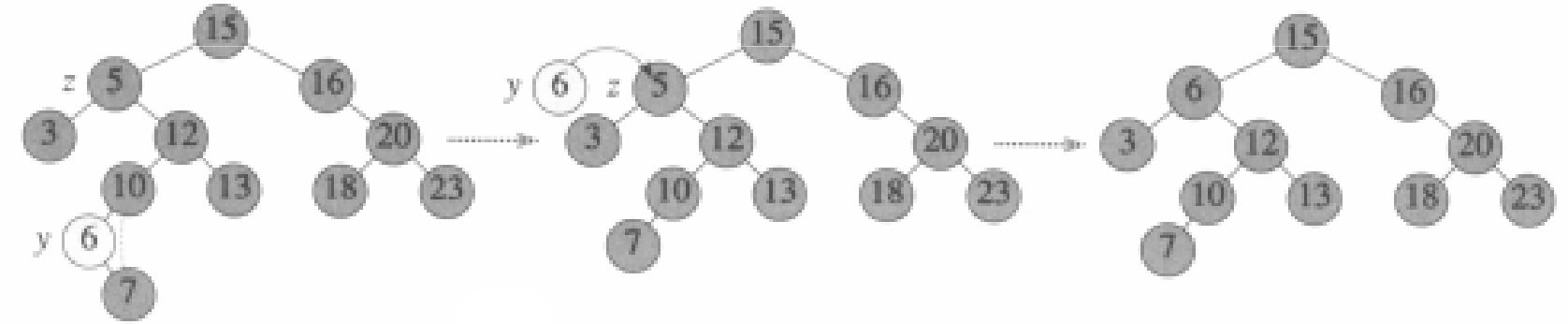


Fonte: CORMEN, T.; LEISERSON, C.; RIVEST, R.; STEIN, C. Introduction to Algorithms. New York: MIT Press, 2004.

Remoção

Caso 3: elemento a ser removido tem dois filhos.

Desengatar o sucessor de *z*, o qual tem no máximo um filho (digamos, *y*), e substituír o conteúdo de *z* pelo conteúdo de *y*.



Fonte: CORMEN, T.; LEISERSON, C.; RIVEST, R.; STEIN, C. Introduction to Algorithms. New York: MIT Press, 2004.

Observações:

1) Em vez do sucessor, poderiamos também eleger o predecessor;
2) O sucessor de *z* tem no máximo um filho (veja exercício na lista).

Complexidade

Outros resultados

- Se elementos são inseridos em uma árvore binária de busca segundo uma ordem aleatória, então a altura esperada da árvore é O (log n).

- O desbalanceamento da árvore pode ser amenizado se, em vez de escolher sempre o nó sucessor para ser removido, nós alternarmos entre o predecessor e o sucessor.

- Remoções podem aumentar a altura da árvore. Se existirem freqüentes remoções seguidas por inserções, a altura da árvore é O ($\sqrt{n}$), mesmo para inserções e remoções aleatórias.

Árvores balanceadas

- 2-3
- AVL
- Graduadas
- Rubro-negras
- B
- Outras

Obs.: Estas árvores oferecem uma solução ao problema de degradação, motivada por possíveis desbalanceamentos, da complexidade de algoritmos que operam sobre árvores binárias de busca.

Árvore 2-3

- Uma árvore 2-3 é uma árvore com as seguintes propriedades:

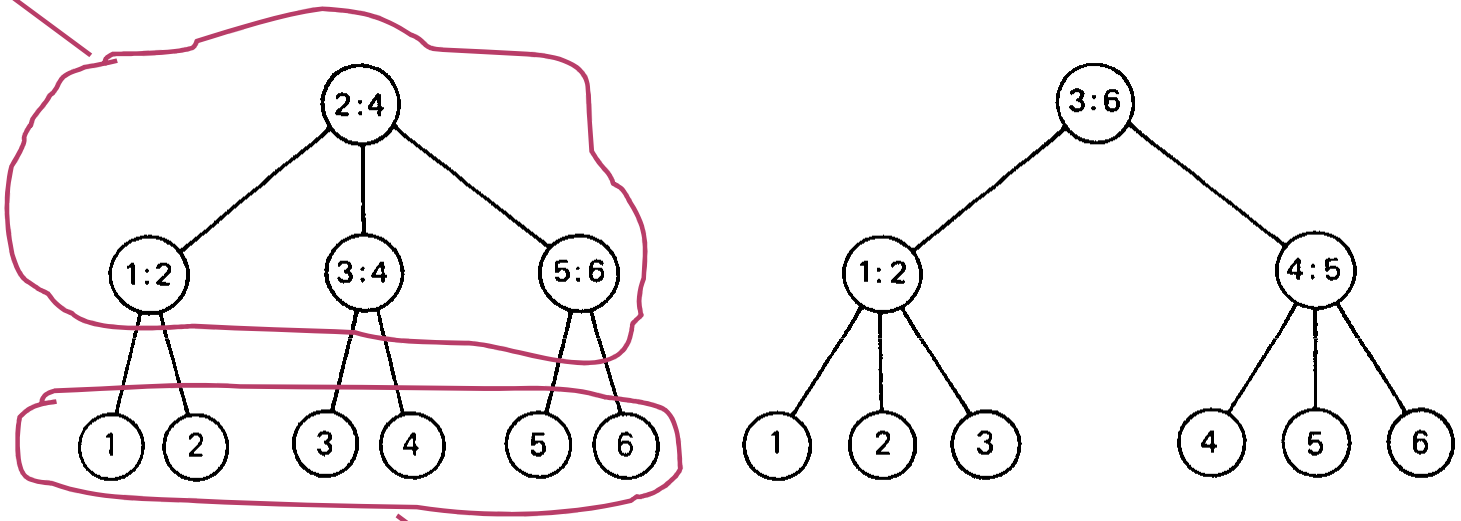
  - toda folha está na mesma altura;

  - todo nó que não é uma folha (nó interno) possui 2 ou 3 filhos;

  - todo nó interno possui dois valores v_1 e v_2;
    . v_1 é o maior valor encontrado na subárvore esquerda do nó;
    . v_2 é o maior valor encontrado na subárvore intermediária do nó.

Árvore 2-3

Nós internos: usados como índice

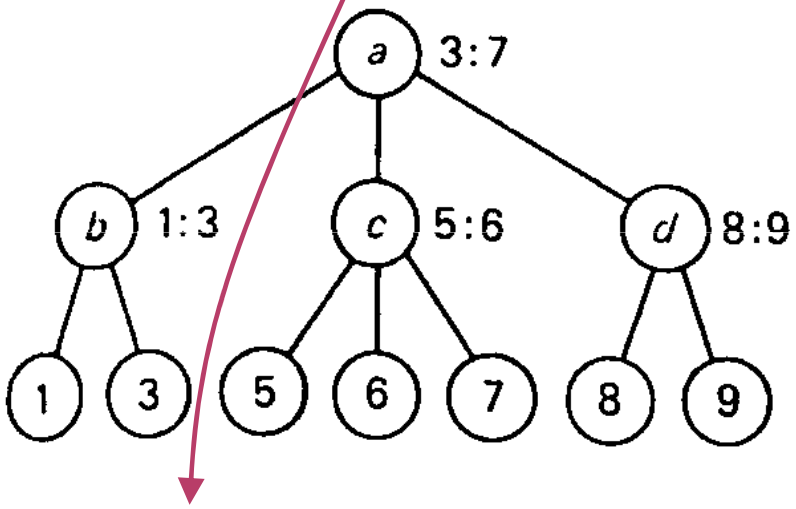


Folhas: contêm informação

Fonte: AHO, A. V.; HOPCROFT, J. E.; ULLMAN, J. D. Data Structures and Algorithms. Reading: Addison-Wesley, 1982.

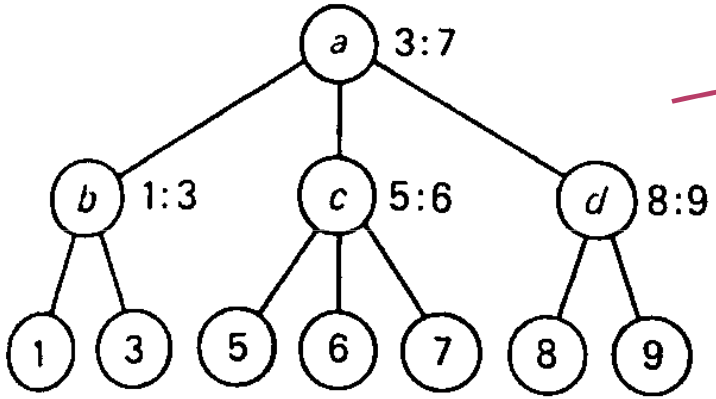
Busca

$T(n) = O(\log n)$

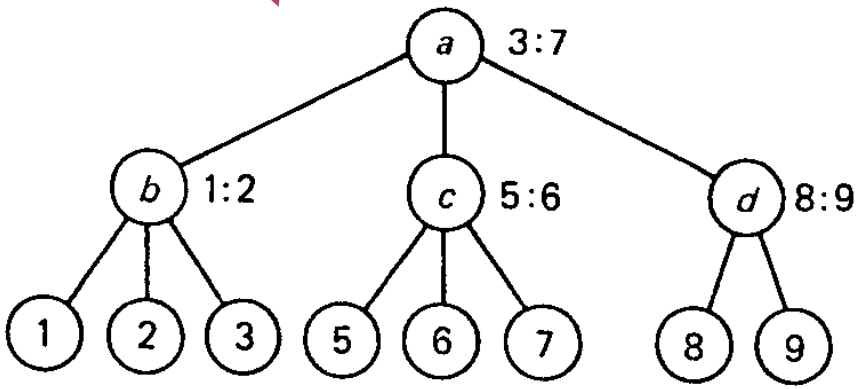


Inserção

Caso 1: inserção sob um pai com dois filhos.

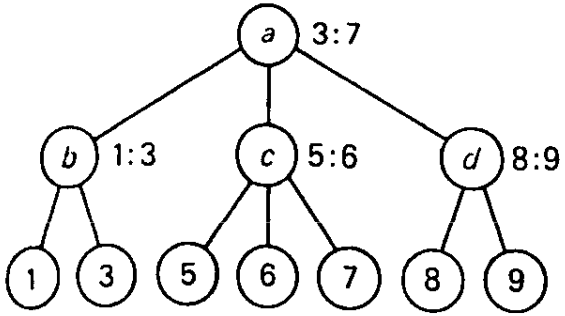


Por exemplo, inserir o elemento 2.

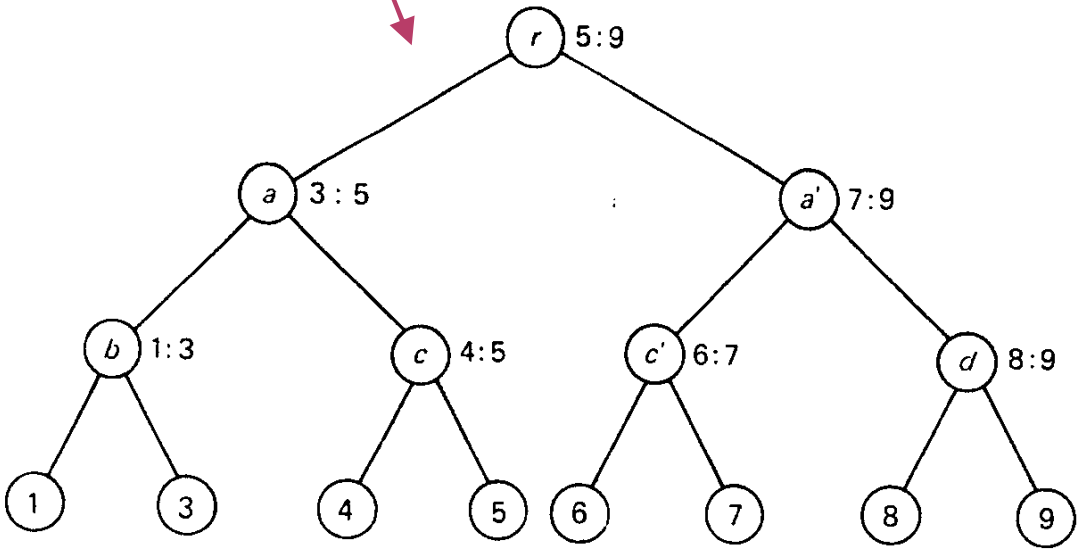


Inserção

Caso 2: inserção sob um pai com três filhos.



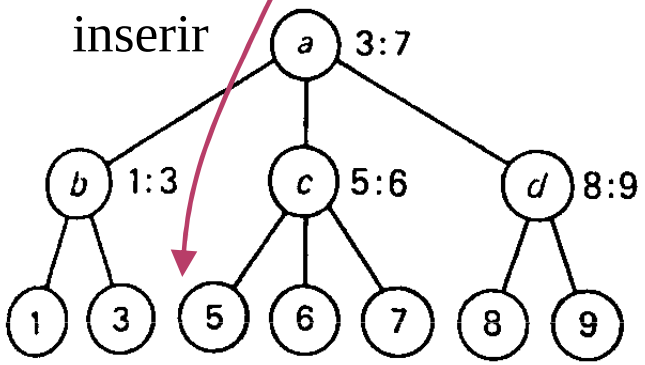
Por exemplo, inserir o elemento 4.



Complexidade

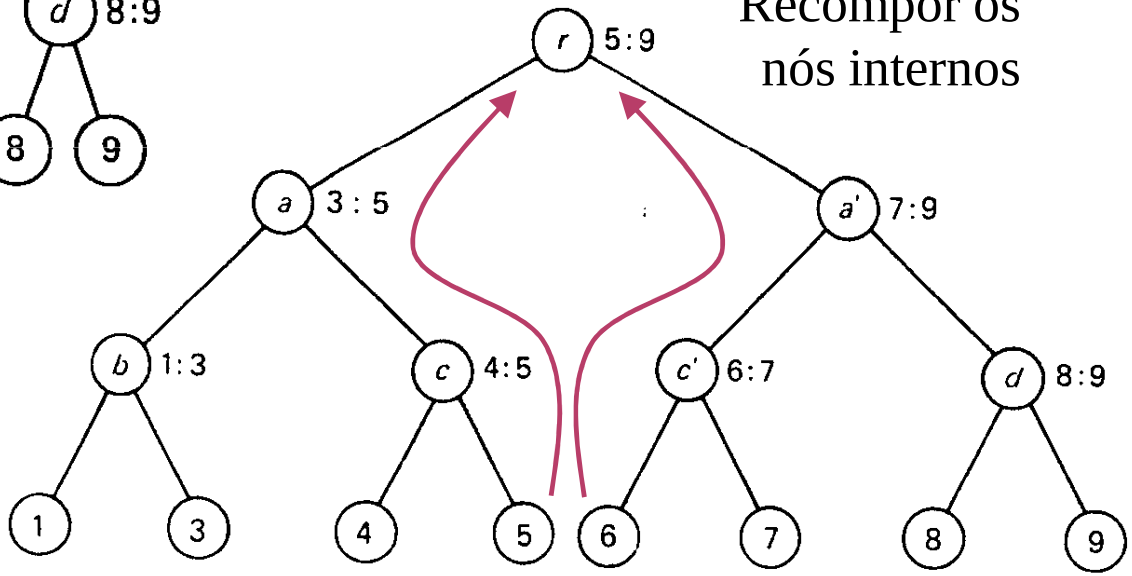
Buscar posição a inserir

$T(n) = O(\log n)$



$T(n) = O(\log n)$

Recompor os nós internos

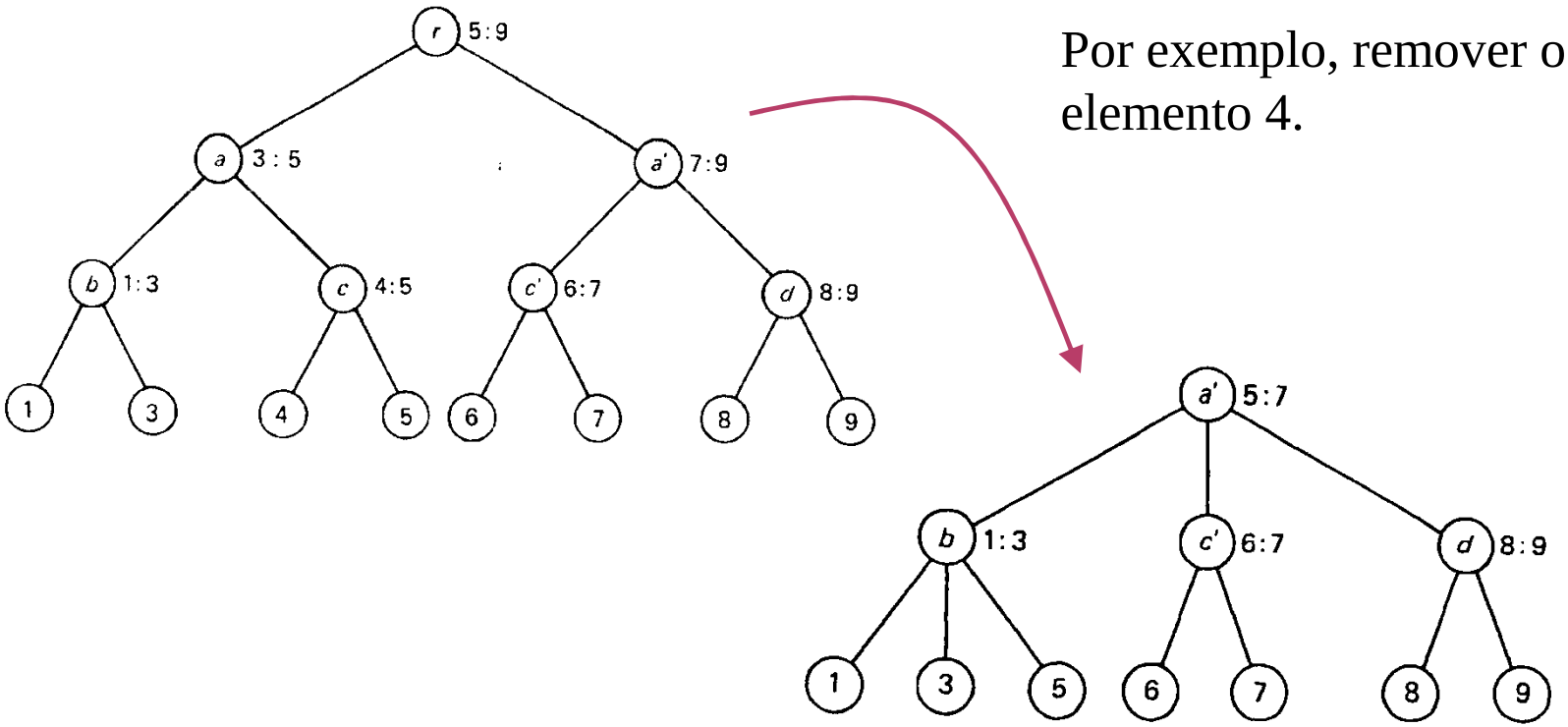


$T(n) = O(\log n) + O(\log n) = O(2 \log n) = O(\log n)$

Remoção

Caso 1: remoção sob um pai com três filhos: trivial.

Caso 2: remoção sob um pai com dois filhos

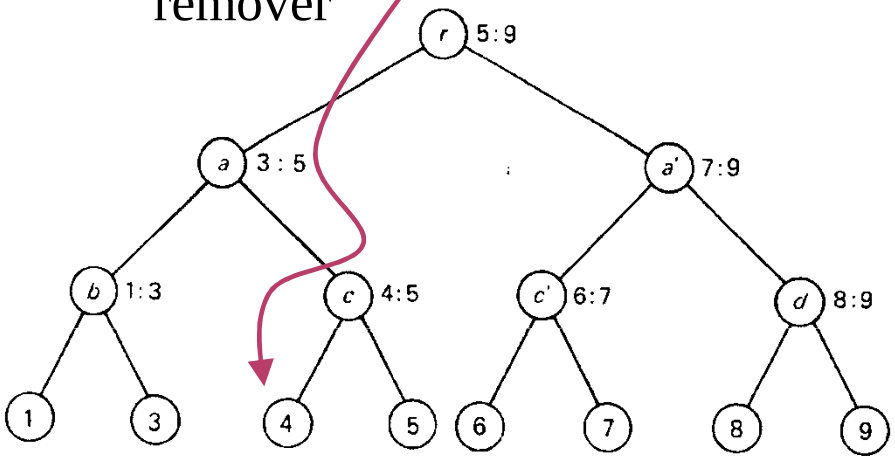


Por exemplo, remover o elemento 4.

Complexidade

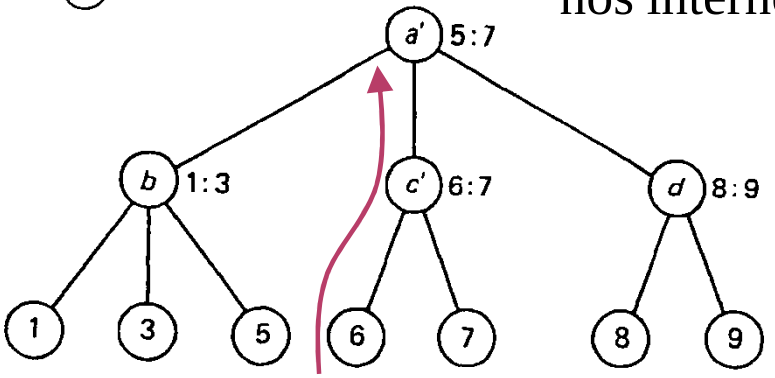
Buscar elemento a remover

$T(n) = O(\log n)$



$T(n) = O(\log n)$

Recompor os nós internos



$T(n) = O(\log n) + O(\log n) = O(2 \log n) = O(\log n)$

Memória consumida

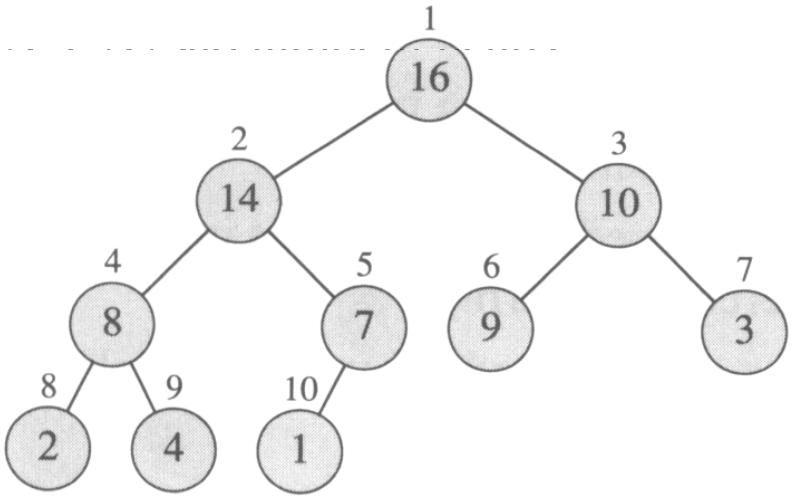
- Nós índice: servem de referências para a informação;
- Nós folha: informação propriamente.

Qual é a relação entre a quantidade de memória gasta por nós índice e a quantidade de memória gasta com nós folha?

Heap

Seja A uma árvore binária cuja raiz é r.
Sejam A_e e A_d as subárvores esquerda e direita de A, respectivamente.

Nós dizemos que A é um heap se ele satisfizer às seguintes propriedades:



(a)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
16	14	10	8	7	9	3	2	4	1

(b)

Filas de prioridade

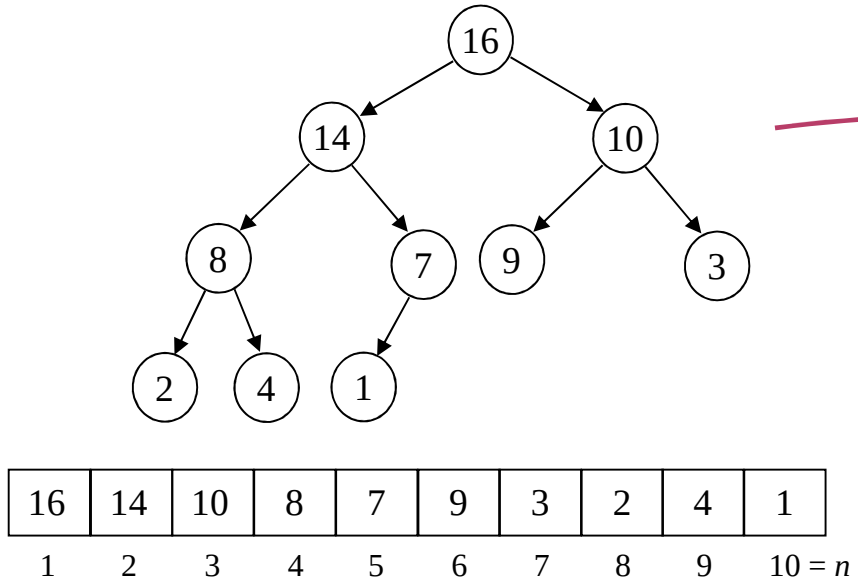
Um heap é uma estrutura de dados útil para implementar filas de prioridade.

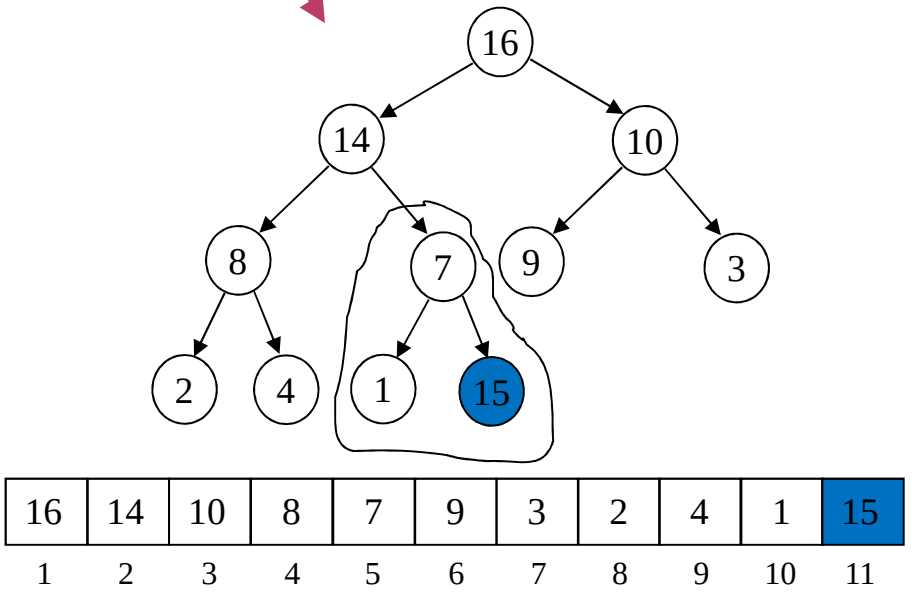
Filas de prioridade requerem eficiência na execução das seguintes operações:

- Inserção (*x*): insere um elemento *x* na estrutura de dados;
- Remoção (*x*): remove o maior elemento da estrutura de dados.

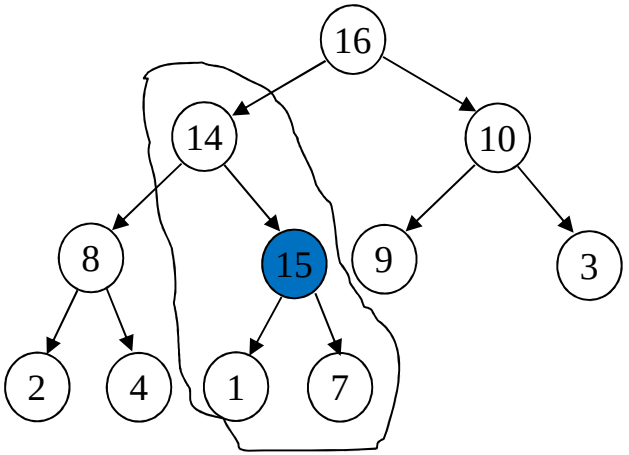
Inserção

Seja, por exemplo, inserir o número 15

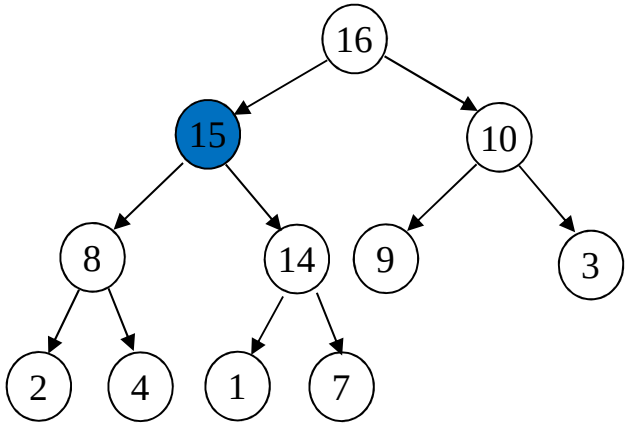




Inserção



16	14	10	8	15	9	3	2	4	1	7
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11



16	15	10	8	14	9	3	2	4	1	7
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Inserção

Algoritmo InserirHeap (A, n, x)
Entrada: A, um heap de $n \geq 1$ elementos representado como um vetor e x, um elemento a inserir.
Saída: o heap com o elemento x inserido.

```
{
    n := n + 1; A[n] := x;

    // Restabelece a propriedade de heap para toda árvore.
    filho := n; pai := ⌊ filho / 2 ⌋ ;
    enquanto ( pai ≥ 1 e A[filho] > A[pai] )
    {
        troca := A [pai]; A[pai] := A[filho]; A[filho] := troca;
        filho := pai;
        pai := ⌊ filho / 2 ⌋
     }
}
```

Complexidade

A complexidade deste algoritmo pe proporcional à quantidade de vezes que o laço “enquanto” é executado.

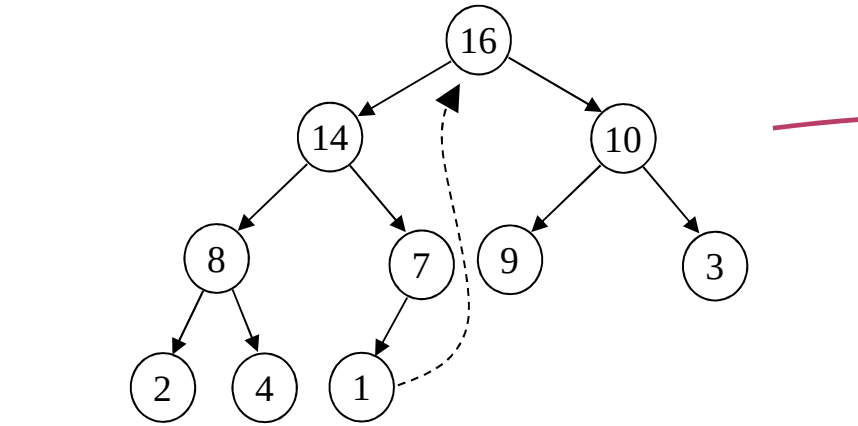
A variável “pai” controla o laço e assume valores segundo a P.G. n, $n/2$, $n/4$, ..., 2, 1.

A quantidade k de valores assumidos pela variável é igual a quantidade de vezes em que o laço será executado no pior caso.

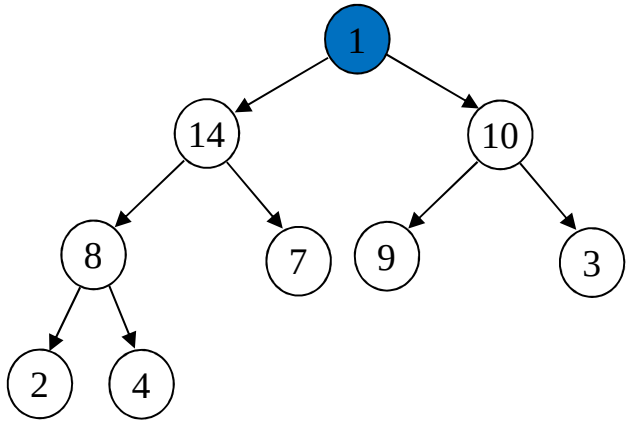
$a_k = a_1 . r^{k-1}$
$1 = n . (1/2)^{k-1}$
$2^{k-1} = n$
$k - 1 = \log n$
$k = \log (n) + 1$. O laço é executado, no pior caso, $\log (n) + 1$ vezes.

$T(n) = O (\log n)$.

Remoção

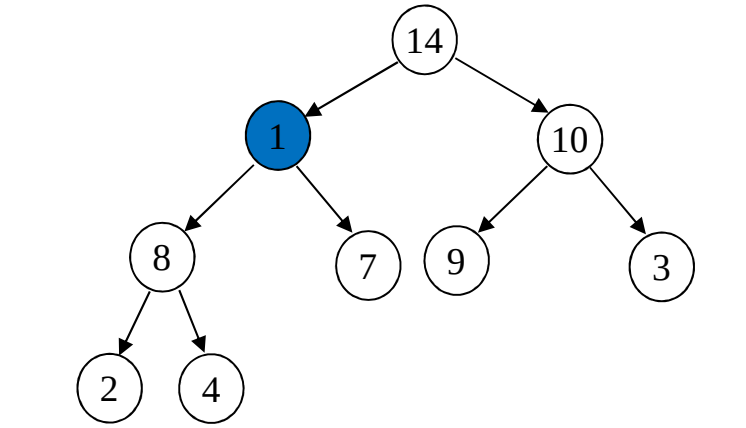


16	14	10	8	7	9	3	2	4	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 = *n*

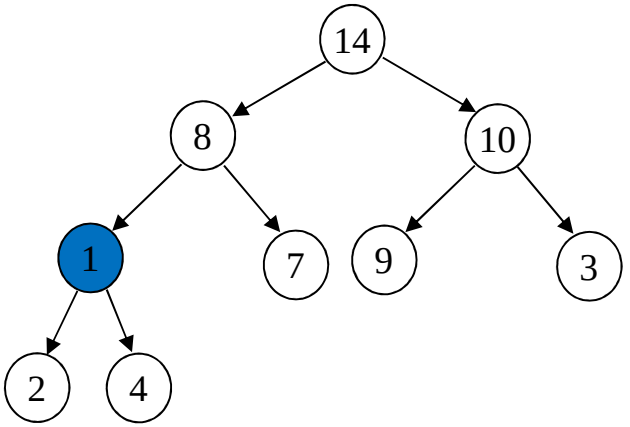


1	14	10	8	7	9	3	2	4
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Remoção

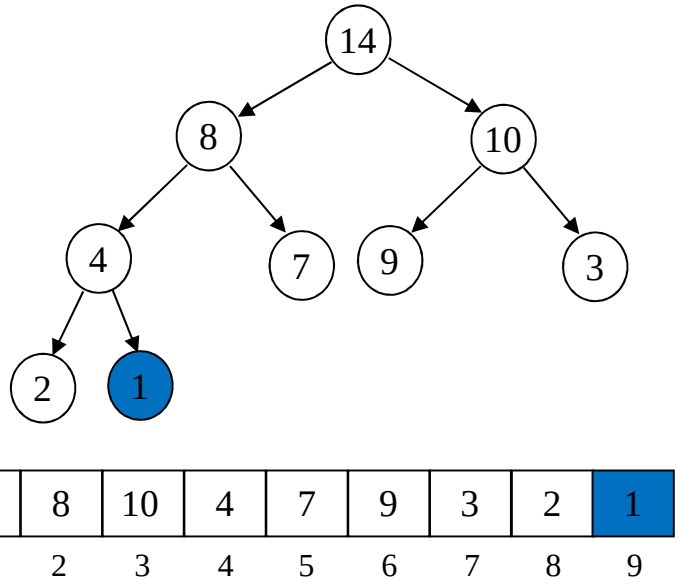


14	1	10	8	7	9	3	2	4
1	2	3	4	5	6	7	8	9



14	8	10	1	7	9	3	2	4
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Remoção



Remoção

Escrita do algoritmo será deixada como exercício.

Complexidade:
No pior caso serão realizadas tantas trocas quanto a altura (h) da árvore. Cada troca envolve duas comparações.

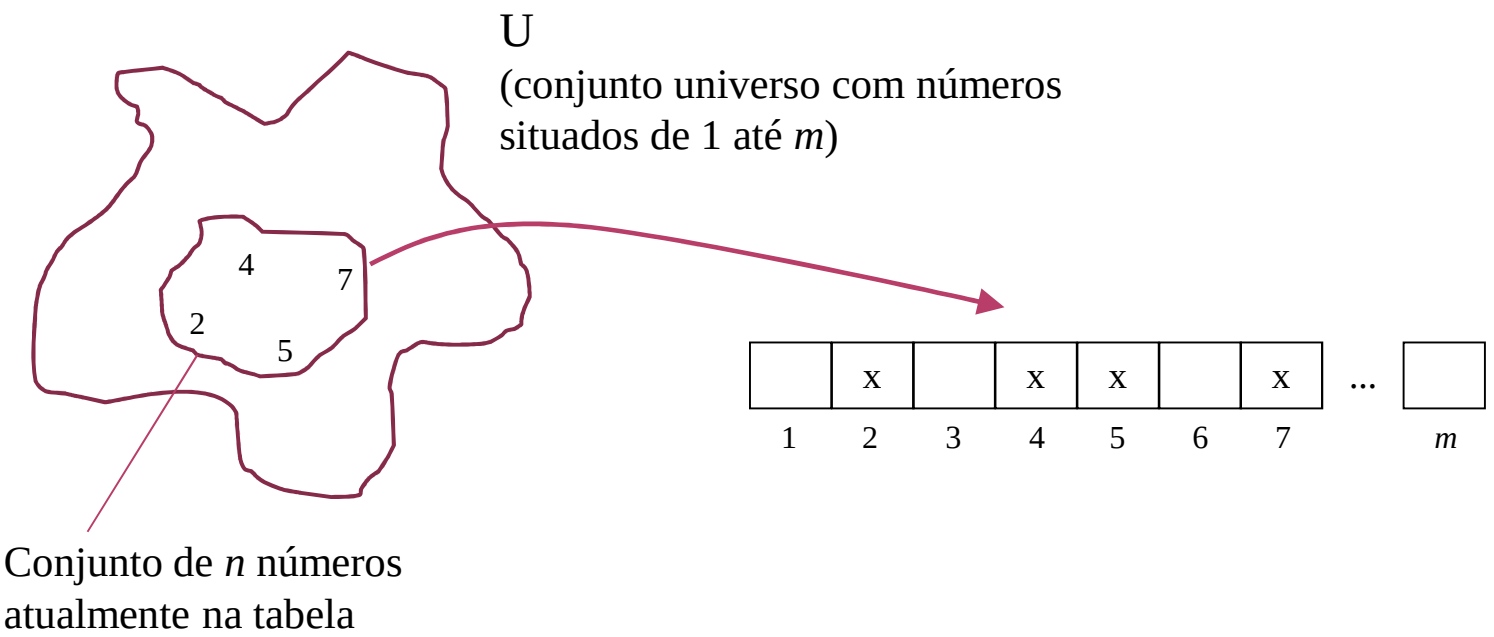
$h = O(\log n)$ para árvores binárias balanceadas.

$T(n) = 2\,h = 2\,O(\log n) = O(\log n)$.

Tabelas de dispersão (ou espalhamento)
(*Hash tables*)

Motivação: tabelas de acesso direto

n números inteiros (não repetidos) no intervalo de 1 a *m*, onde *m* é pequeno (é possível alocar memória de tamanho igual a *m*)

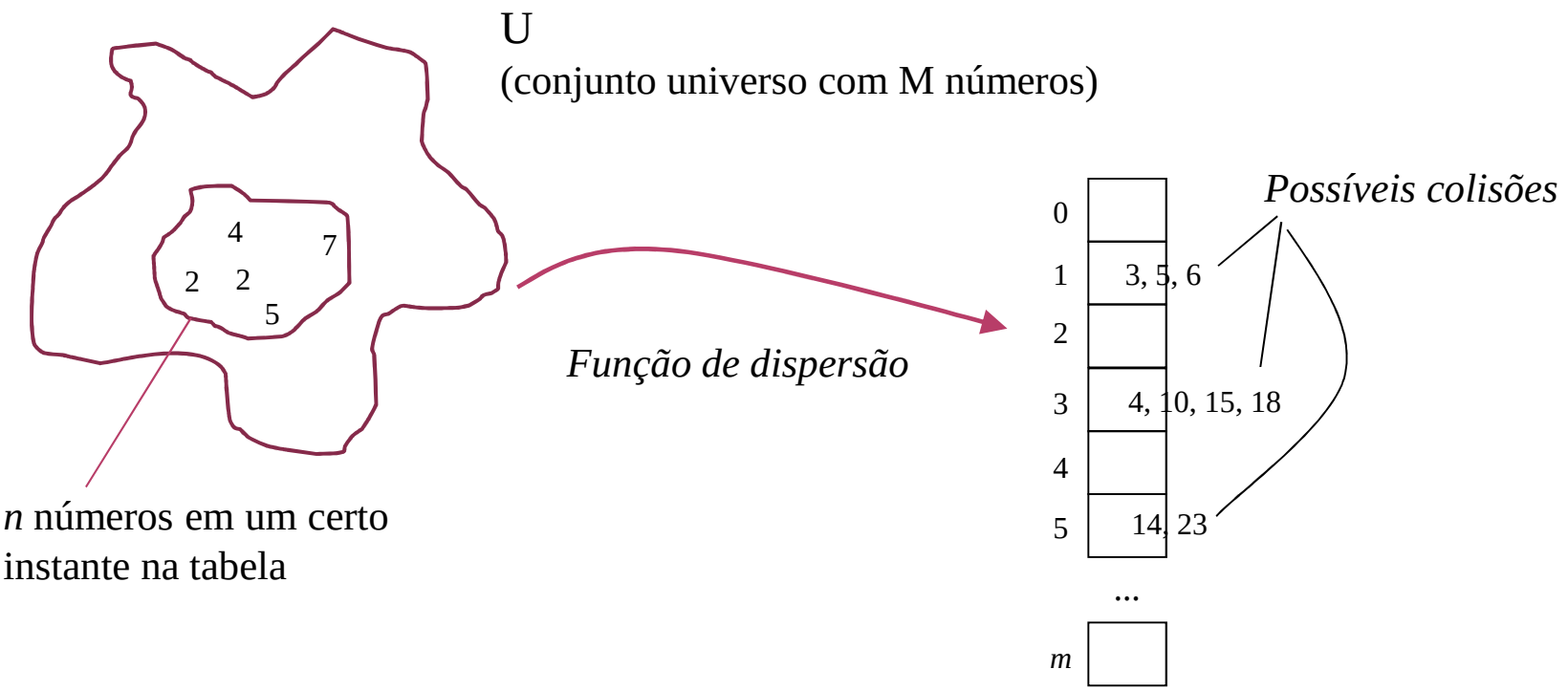


Um problema

E se $n >>>> m$?

Exemplo: 100 milhões de CPFs para serem inseridos em uma tabela indexada de 0 a 999 elementos.

Formalizando



Necessidades

- Função de dispersão que mapeia uniformemente;
- Estratégias para resolver as colisões.

Funções de dispersão

- $h(x) = x \bmod m$ (para m primo);
- Se m não puder ser ajustado para um número primo:
  $h(x) = (x \bmod p) \bmod m$ (para algum p primo, $p > m$);
- Outras existem.

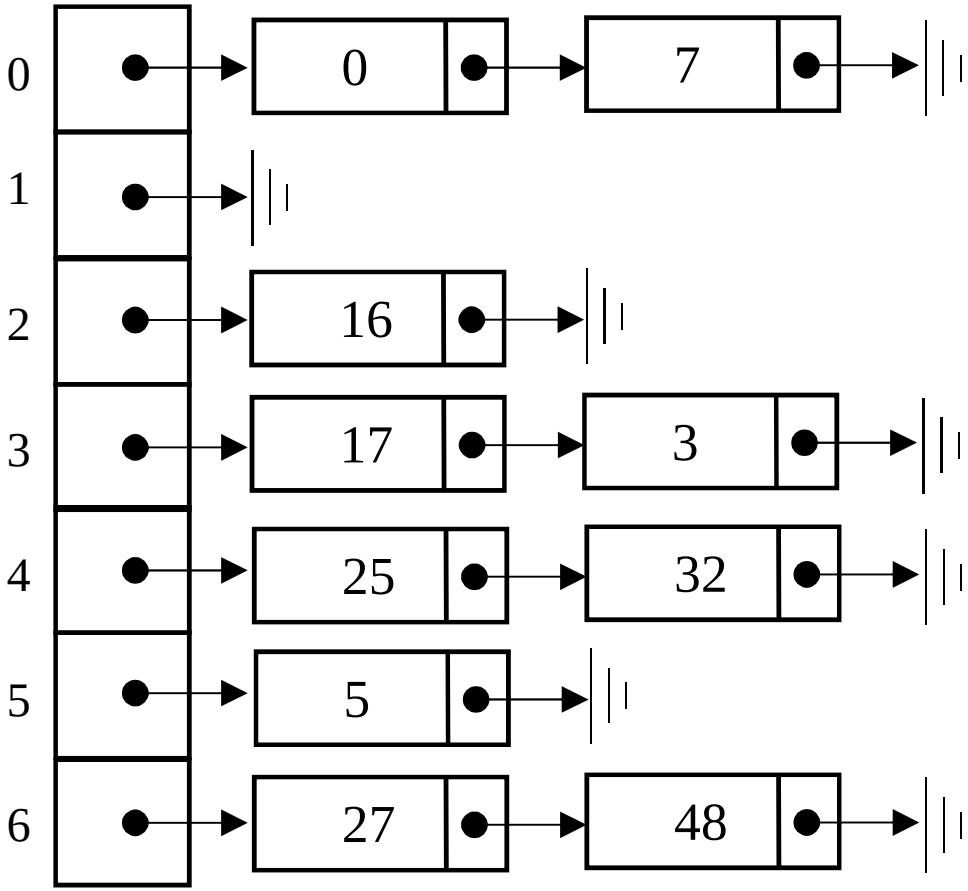
Resolvendo as colisões

- Por encadeamento exterior;
- Busca linear na tabela;
- Outras estratégias existem.

Encadeamento exterior

Sejam
$h(x) = x \bmod 7$

E o conjunto de elementos:
27, 25, 16, 0, 17, 5, 7, 3, 48, 32



Busca

Algoritmo Busca (T, *x*)

Entrada: T, uma tabela de dispersão e *x* um valor.

Saída: um ponteiro para o elemento da tabela T cujo valor é igual a *x* ou nil, caso tal elemento não exista.

```
{
    i := x mod m;  // m é tamanho da tabela, indexada de 0 a m – 1.
    retornar Busca ( T[i], x) // Busca x na lista apontada por T[i].
}
```

Complexidade

Supondo que a função mapeia uniformemente, então cada lista terá n/m elementos.

A complexidade do algoritmo é proporcional à busca em uma das listas.

Logo,

$T(n, m) = O(n/m)$.

Se for possível controlar o valor de m para que $n \leq c\ m$, para c constante, então $T(n) = O(1)$.

Inserção e remoção

- Algoritmos similares.

- Complexidade
  A mesma da busca.

Controlando o fator de carga
(tabelas de dimensão dinâmica)

- Fator de carga $f = n / m$.

- Seja $f = 4$ (listas terão tamanho máximo esperado de 4 elementos)

  1 - Inserir elementos na tabela.

  2 - Quando $f = 4$, dobrar o tamanho da tabela.

  3 – Voltar ao passo 1.